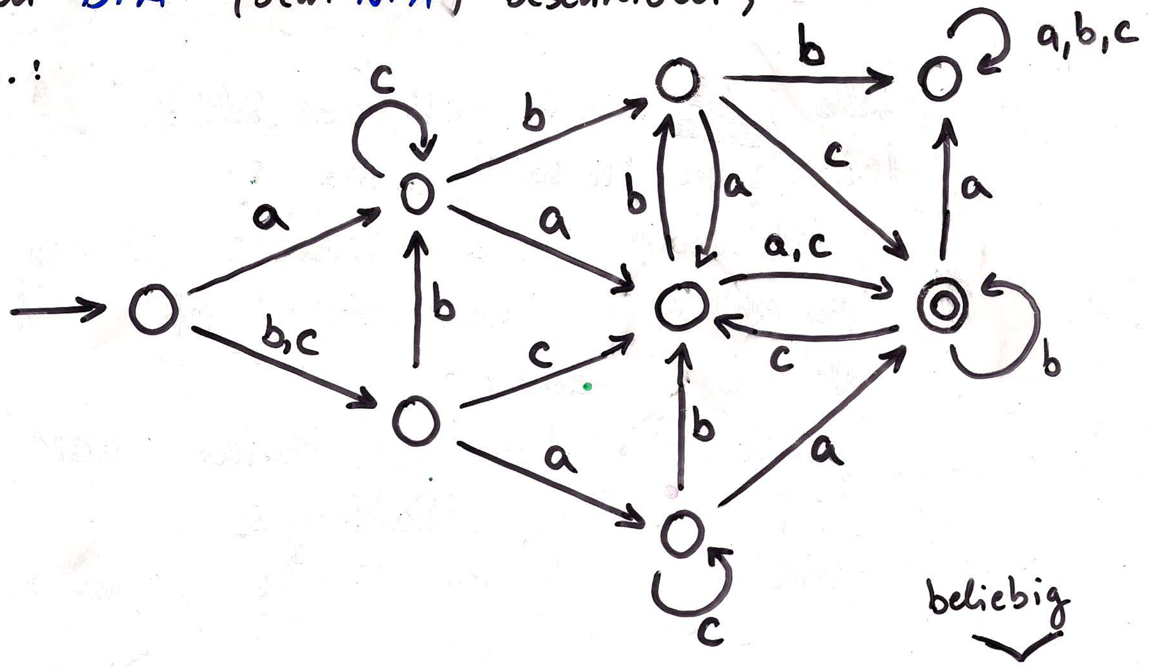
Pumping Lemma

Idee:

Jede reguläre Sprache L lässt sich durch mindestens einen DFA (bzw. NFA) beschreiben,

z.B.:



beliebig

Bei einigen Wörtern lässt sich mind. ein Teilwort „aufpumpen":

- acbc ⇝ accbc ⇝ acccbc ⇝ ...
- bcbaa ⇝ bcbabaa ⇝ bcbababa ⇝ ...
- caab ⇝ caabb ⇝ caabbb ⇝ ...
- bcbccbc ⇝ bcbccbccbc ⇝ bcbccbccbccbc ⇝ ...

Bei anderen nicht: z.B.: baa

- baa ⇝ bbaa ⇝ bbbaa ⇝ bbbbaa ↯
- baa ⇝ baaa ↯
- baa ⇝ baaa ↯
- baa ⇝ babaa ↯
- baa ⇝ baaaa ↯
- baa ⇝ baabaa ↯

mit „↯" ist „∉ L" gemeint!

Wann lässt sich ein Wort also beliebig aufpumpen?

→ Wenn es im DFA / NFA mindestens einen „Loop" macht.

Sei n die Anzahl an Zuständen des DFAs / NFAs, ab welcher Wortlänge macht jedes Wort auf jeden Fall einen Loop?

→ Ab länge n. Vielleicht auch für kleiner, aber ab n aufwärts immer!

Also:

L regulär $\Rightarrow$ alle Wörter in L, die mindestens eine bestimmte Wortlänge haben (n) lassen sich innerhalb der ersten n Stellen beliebig aufpumpen.

Formaler:

$$L \text{ regulär} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \ \forall z \in L \text{ mit } |z| \geq n \ \exists u,v,w: \ z = uvw \text{ und: } v \neq \varepsilon, \ |uv| \leq n, \ \forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^iw \in R$$

Äquivalent dazu: (was uns interessiert!!)

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \exists z \in L \text{ mit } |z| \geq n \ \forall u,v,w: \ z = uvw \text{ lässt sich \underline{nicht} aufpumpen}$$

$\Rightarrow$ L nicht regulär