rot: Kapitel, blau: Themen, grün: Begriffe, grau: Kommentare.

Allgemeines

Mitternachtsformel. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

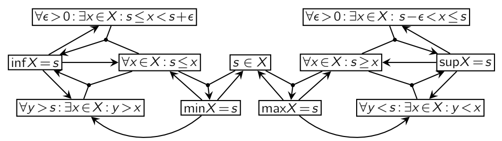
Potenzen und Logarithmen. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0, b, c > 0, b, c \neq 1$ gilt: $\log_c b = a \iff c^a = b \iff \sqrt[a]{b} = c$.
Nicht vergessen! $a^b := e^{b \ln(a)}$.

Logarithmusregeln. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_a(n \cdot m) = \log_a n + \log_a m$, $\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$, $\log_a n^m = m \cdot \log_a n$, $\log_{a^b} n = \frac{1}{b} \cdot \log_a n$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a^n = n$, $\log_a \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}$.

Bernoulli-Ungleichung. $\forall n > 0, x \geq -1$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1. Reelle Zahlen

Obere und untere Schranken. Für einen angeordneten Körper K, $X \subset K$ und $s \in K$ gilt:



Pfeile bedeuten $A \implies B$ bzw. $A \wedge B \implies C$.

Rechenregeln für Suprema.

1. $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
2. $\lambda > 0 \implies \sup(\lambda X) = \lambda \sup(X)$
3. $X, Y \subset [0, \infty) \implies \sup(X \cdot Y) = \sup(X) \cdot \sup(Y)$
4. $X \subset Y \implies \sup(X) \leq \sup(Y)$

2. Folgen in $\mathbb{R}$

Beschränktheit. (a_n) ist nach oben beschränkt, falls $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n < C$, nach unten beschränkt, falls $\exists C \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n > C$ und beschränkt, falls $\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| < C$ bzw. falls nach unten und oben beschränkt.

Grenzwert. (a_n) konvergiert gegen a ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$), falls $\forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \epsilon$. Wenn kein solches a existiert, dann divergiert sie.

Beispiele. Für $n \to \infty$ gilt: $\frac{1}{n^p} \to 0$ ($p \in \mathbb{N}$), $\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$, $x^n \to 0$ ($0 < x < 1$) und $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$. Es divergiert: $(-1)^n$.

Rechenregeln für Grenzwerte. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$),
4. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$,
5. Einschließungskriterium: $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Uneigentliche Konvergenz. Eine divergente Folge (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls $\forall K > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: a_n > K$ (bzw. $a_n < -K$). Notation wie bei Konvergenz.

Beispiele. n^2, x^n ($x > 1$) und $\frac{n^2-1}{n}$ konvergieren uneigentlich gegen ∞.

Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte. Falls $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann:

1. $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \implies \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$,
2. $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \implies \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$ und $a \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\} \implies \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$
3. $a \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Bei 3. reicht es, dass (a_n) beschränkt ist.

Monotonie von Folgen. Eine reelle Folge (a_n) heißt monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n$. Analog monoton fallend für $\leq$, streng monoton wachsend für $>$ und streng monoton fallend für $<$.

Häufungspunkt.

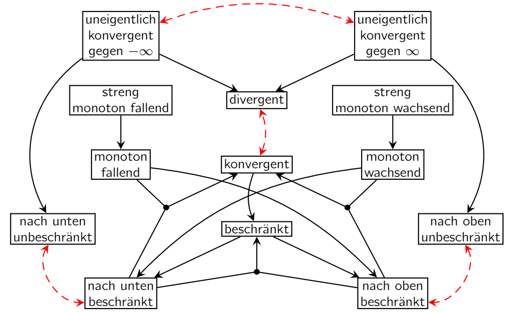
1. Falls $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend oder fallend, dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Wichtige Aussagen:

- Bolzano-Weierstrass: (a_n) beschränkt $\implies$ (a_n) hat mindestens einen Häufungspunkt,
- (a_n) monoton fallend oder wachsend $\implies$ (a_n) hat höchstens einen Häufungspunkt,
- (a_n) konvergent $\implies$ (a_n) hat genau einen Häufungspunkt (= Grenzwert),
- (a_n) uneigentlich Konvergent gegen $-\infty$ oder ∞ $\implies$ (a_n) hat keinen Häufungspunkt.

Limes superior und limes inferior. Falls (a_n) nach unten (bzw. oben) beschränkt ist, ist $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n$) sein größter (bzw. kleinster) Häufungspunkt.

Eigenschaften. Für eine reelle Folge (a_n) gilt:



Schwarze Pfeile bedeuten $A \implies B$ bzw. $A \wedge B \implies C$ und rote $\neg A \vee \neg B$, d. h. A und B schließen sich gegenseitig aus.

3. Folgen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$

Komplexe Zahlen. $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Für $z = a + bi$ gilt:

- Konjugierte: $\overline{z} = a - bi$.
- Betrag: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- Dreiecksungleichungen: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ gilt:

- Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$,
- Subtraktion: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$,
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$,
- Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)i$.

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $z \neq 0$ lässt sich eindeutig in die Polarform $z = re^{\varphi i}$ bringen. Es gilt:

- $a = r\cos(\varphi)$,
- $b = r\sin(\varphi)$,
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und
- $\varphi = \begin{cases} \arccos(a/r) & \text{falls } b \geq 0 \\ -\arccos(a/r) & \text{sonst} \end{cases}$

Beschränktheit. $(z_n) = (a_n + ib_n)$ ist beschränkt, falls $\exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N}: |z_n| < C$ bzw. falls a_n und b_n beschränkt sind.

Grenzwert. Die Definition der Eigenschaften konvergent und divergent sind in $\mathbb{C}$ identisch wie in $\mathbb{R}$ (s. Kapitel 2).

Eigenschaften. Die Eigenschaften konvergent, divergent und beschränkt haben dieselben Beziehungen wie bei reellen Folgen (s. Bild). Die restlichen Eigenschaften können für Folgen in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ nicht definiert werden.

4. Reihen

Konvergenzkriterien. Sei (a_n) eine komplexe (oder reelle) Zahlenfolge.

- Nullfolgenkriterium. Es gilt: a_n konvergiert nicht gegen Null $\implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergiert.
- Majoranten- und Minorantenkriterium. Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
  1. $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergiert $\implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut,
  2. $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergiert $\implies \sum_{k=1}^\infty b_k$ divergiert.
- Quotientenkriterium. Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:
  1. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut,
  2. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergiert.
- Wurzelkriterium. Es gilt:
  1. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert absolut,
  2. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergiert.
- Leibniz-Kriterium. Falls (a_n) reell und monoton fallend, dann gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ konvergiert.

Folgende Reihen konvergieren und können als Majoranten benutzt werden:

- $\sum_{k=0}^\infty z^k = \frac{1}{1-z}$ (für $|z| < 1$)
- Teleskopreihe: $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = 1$
- $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ (konvergiert für $s \in \mathbb{Q}, s \geq 2$)
- Exponentialreihe: $\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z$ (für alle $z \in \mathbb{C}$)
- Logarithmusreihe: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ (für $x \in (-1, 1]$)

Folgende Reihen divergieren und können als Minoranten benutzt werden:

- $\sum_{k=0}^\infty z^k$ (divergiert für $|z| \geq 1$)
- Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$

Potenzreihe. $P(z) := \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$; $c_k \in \mathbb{C}$; $z \in \mathbb{C}$. Für den Konvergenzradius $R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ gilt:

- $|z| < R \implies P(z)$ konvergiert,
- $|z| > R \implies P(z)$ divergiert.

Cauchy-Produkt.

1. Für absolut konvergente, komplexe Reihen $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k$ gilt $\left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty b_k\right) = \sum_{m=0}^\infty c_m$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$.
2. Für Potenzreihen $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ mit Konvergenzradien R_a und R_b ist $\left(\sum_{k=0}^\infty a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k\right) = \sum_{m=0}^\infty c_m z^m$ mit $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\min\{R_a, R_b\}$.

Exponentialfunktion. Es gilt $\exp(x) = e^x$ und für $\forall z, w \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

- $\exp(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$
- $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$,
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$, $\exp(z) \neq 0 \wedge \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$,
- $\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\right| \leq 2 \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$,
- $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \exp(z)$,
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \infty$,
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{z + 2\pi i} = e^z$,
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $|e^{ix}| = 1$.

Trigonometrische Funktionen.

- $\sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,
- $\cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$,
- $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
- $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$,
- $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$,
- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,
- $\cos(x) = Re(e^{ix})$, $\sin(x) = Im(e^{ix})$,
- $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$,
- $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen.

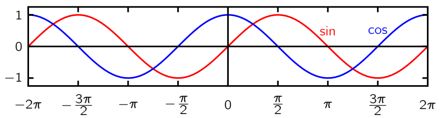
- $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^\infty \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}$,
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$,
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Hyperbelfunktionen.

- $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!}$,
- $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2n)!}$,
- $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,
- $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}\cosh(x) + \frac{1}{2}$,
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

Werte von Sinus und Kosinus

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sin	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cos	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1



5. Stetigkeit

Defintion. $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall (x_n)$ mit $\lim_{x\to 0} x_n = c$ gilt $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(c)$

Rechenregeln. $D \subseteq \mathbb{R}$; $f, g: D \to \mathbb{R}$; f, g stetig in $c \Rightarrow f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) stetig in c

Komposition. $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f: D \to \mathbb{R}$ stetig in c

- $y := f(c) \in D' \wedge g$ stetig in $y \Rightarrow (g \circ f): D \to \mathbb{R}$ stetig in c
- f, g stetig $\wedge f(D) \subseteq D' \Rightarrow (g \circ f): D \to \mathbb{R}$ stetig

ε-δ-Charakterisierung. $D \subseteq \mathbb{R}, f: D \to \mathbb{R}, c \in D \Rightarrow f$ stetig in $c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in D: |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Zwischenwertsatz. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$ mit $\min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\}: \exists x \in [a, b]: f(x) = y$

Satz von Maximum und Minimum. Für $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt: f ist beschränkt und f nimmt in $[a, b]$ Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]: f(x_{\max}) = \sup\{f(x): x \in [a, b]\} \wedge f(x_{\min}) = \inf\{f(x): x \in [a, b]\}$.

Stetigkeit in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$. wörtlich übertragbar. $D \subseteq \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f$ stetig: $D \to \mathbb{C}$ bzw. $f: D \to \mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

Stetigkeit von Potenzreihen. $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k \Rightarrow f: \{z: |z| < R\} \to \mathbb{C}$ stetig

6. Differentiation

Definition Ableitung. Für $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$ gilt: $f'(c) := \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Spezielle Ableitungen.

$f(x)$	c	x^c	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$f'(x)$	0	cx^{c-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$

$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Alternative Darstellung: $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$.

Ableitungsregeln.

- Summenregel: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
- Faktorregel: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.
- Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$.
- Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Sei $f\colon A\to B$ eine beliebige Funktion. Dann gilt:
- f injektiv $\iff$ Für jedes $y\in B$ gibt es höchstens ein $x\in A$ mit $f(x)=y$.
- f surjektiv $\iff$ Für jedes $y\in B$ gibt es mindestens ein $x\in A$ mit $f(x)=y$.
- f bijektiv $\iff$ f injektiv und surjektiv $\iff$ Für jedes $y\in B$ gibt es genau ein $x\in A$ mit $f(x)=y$ $\iff$ Es existiert eine Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Für A Intervall und f stetig gilt:
- f injektiv $\iff$ f streng monoton wachsend oder streng monoton wachsend.
- f bijektiv $\implies$ f^{-1} auch stetig.

Für f differenzierbar und A offenes Intervall gilt:
- $f'(x)\ge 0$ für alle $x\in A$ $\iff$ f monoton wachsend.
- $f'(x)>0$ für alle $x\in A$ $\implies$ f strengmonoton wachsend.
- $f'(x)\le 0$ für alle $x\in A$ $\iff$ f monoton fallend.
- $f'(x)<0$ für alle $x\in A$ $\implies$ f streng monoton fallend.

falls f stetig ist, dann kann man oft die Surjektivität mit dem Zwischenwertsatz beweisen.

Ableitung von Umkehrfunktionen. Falls f bijektiv und differenzierbar, dann gilt: $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

7. Anwendungen der Differentialrechnung

Extrempunkte. Für $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x\in(a,b)$ gilt:
- $f'(x)=0$ und $f''(x)>0$ $\implies$ x ist lokales Minimum,
- x ist lokales Minimum $\implies$ $f'(x)=0$ und $f''(x)\ge 0$,
- $f'(x)=0$ und $f''(x)<0$ $\implies$ x ist lokales Maximum,
- x ist lokales Maximum $\implies$ $f'(x)=0$ und $f''(x)\le 0$.

Satz von Rolle. $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a)=f(b)$ $\implies \exists\xi\in(a,b)\colon f'(\xi)=0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung. $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar $\implies \exists\xi\in(a,b)\colon f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Landau-Symbole. Für $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ gilt:
- $f(x)=o(g(x))$ für $x\to c$ $\iff \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,
- $f(x)=\mathcal{O}(g(x))$ für $x\to c$ $\iff$ es gibt ein $K>0$, so dass für jede Folge $(x_n)\to c$ und fast alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: $|f(x_n)|\le K\cdot|g(x_n)|$.

Vielleicht hilfreich (aus Wikipedia): $\lim_{x\to c}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\infty \implies f(x)=\mathcal{O}(g(x))$ für $x\to c$.

Satz von l'Hospital. Seien $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ und $f,g\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g'(x)\neq 0$ $(\forall x\in(a,b))$ und entweder $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=0$ oder $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=\infty$. Falls $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

8. Integration

Wichtige Beziehungen. Für $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{f\text{ diff'bar}\implies f\text{ stetig}\implies f\text{ beschränkt}\implies f\text{ integrierbar}}$$

Eigenschaften integrierbarer Funktionen. Für $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar und $c\in\mathbb{R}$ gilt:
1. Linearität: $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$,
2. Additivität: $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$,
3. Monotonie: $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in[a,b]$ $\implies \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$,
4. Zerlegbarkeit: $c\in(a,b)$ $\implies \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung. $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies \exists\xi\in[a,b]\colon \int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$.

Stammfunktion $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, falls $F'=f$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
1. $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f.
2. Für jede Stammfunktion F von f gilt: $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_{x=a}^b$.

Spezielle Stammfunktionen.

$f(x)$	c	x^c	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$F(x)$	cx	$\frac{x^{c+1}}{c+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$x\ln(x)-x$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$

Hier ist $F(x)$ nur eine mögliche Stammfunktion von $f(x)$!

Integrationsregeln.
- Partielle Integration: $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$.
- Substitutionsregel. $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\left[\int f(y)\,dy\right]_{y=g(x)}$. Rezept: 1. Ersetze überall $g(x)$ durch y. 2. Schreibe $\int\cdots dx$ in $\int\frac{\cdots}{y'}\,dy$ um und kürze alle übrigen x weg.

Typische Stammfunktionen
- $\int f(x)\cdot f'(x)\,dx=\left[\int y\,dy\right]_{y=f(x)}=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=f(x)}=\frac{1}{2}f(x)^2$,
- $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\left[\int\frac{1}{y}\,dy\right]_{y=f(x)}=[\ln|y|]_{y=f(x)}=\ln|f(x)|$.
- Für Stammfunktionen der Form $\int\frac{c}{(x-b)^a}\,dx$ gilt: $\int\frac{c}{(x-b)^a}\,dx=\begin{cases}c\ln|x-b| & \text{falls } a=1\\ \frac{c(x-b)^{1-a}}{1-a} & \text{falls } a\neq 1.\end{cases}$

9. Mehr zu Integralen

Uneigentliche Integrierbarkeit. Seien $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ mit $a<b$. Die Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$ heißt uneigentlich integrierbar, falls
- $I=[a,b)$ und $\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{y\uparrow b}\int_a^y f(x)\,dx$ existiert,
- $I=(a,b]$ und $\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{y\downarrow a}\int_y^b f(x)\,dx$ existiert oder
- $I=(a,b)$ und ein $c\in(a,b)$ existiert, so dass f in $(a,c]$ und $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist. Dann setzt man: $\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{y\downarrow a}\int_y^c f(x)\,dx+\lim_{y\uparrow b}\int_c^y f(x)\,dx$ existiert,

Taylorpolynom und -reihe. Für $n\in\mathbb{N}$ ist $T_nf(x;c):=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ das n-te Taylorpolynom von f in c und $T_\infty f(x;c)$ entsprechend die Taylorreihe von f in c.

Eigenschaften von Taylorpolynomen
- $f(x)=\sum_{k=1}^\infty c_kz^k\implies T_nf(x;0)=\sum_{k=1}^n c_kz^k$.
- $T_n(f\cdot g)=T_nf\cdot T_ng$.

Satz von Taylor. $f(x)-T_nf(x;c)=R_{n+1}(x)$ mit $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ für ein $\xi\in[c,x]$. Insbesondere: $R_{n+1}(x)=\mathcal{O}((x-c)^{n+1})$ für $x\to c$.

10. Kurven

Kurven. Für $n\in\mathbb{N}$ und ein Intervall $I\subseteq\mathbb{R}$ ist jede stetige Abbildung $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Das Bild $\{\gamma(t)\mid t\in I\}$ heißt Spur von γ. Für $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$ nennt man γ_i die i-te Komponentenfunktion von γ.

Man kann $\gamma(t)$ auch als Spaltenvektor darstellen!

differenzierbare Kurven. Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^n$ eine Kurve mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen $\gamma_1,\dots,\gamma_n$.
- $\gamma'(t)=(\gamma_1'(t),\dots,\gamma_n'(t))$ heißt Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor.
- $\|\gamma'(t)\|_2$ ist die Geschwindigkeit zur Zeit t.
- γ heißt regulär an der Stelle t, falls $\gamma'(t)$ nicht der Nullverktor ist. In diesem Fall nennt man $T_\gamma(t)=\frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2}$ den Tangentialeinheitsvektor in t.
- Man nennt γ regulär, falls sie in jedem $t\in I$ regulär ist. Sonst ist sie singulär.

Es gilt: $\|(x_1,\dots,x_n)\|_2=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Oft schreibt man einfach $\|\ldots\|$ statt $\|\ldots\|_2$.

Bogenlänge. Die Bogenlänge einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ist $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|_2\,dt$.

Krümmung. Für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ ist $\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\|\gamma'(t)\|_2^3}$ ihre Krümmung.

11. Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Gradient und Hesse-Matrix. Seien $n\in\mathbb{N}$ und $M\subseteq\mathbb{R}^n$ offen. Für jede einmal bzw. zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon M\to\mathbb{R}$ heißt $\nabla f(x)$ bzw. $\nabla^2f(x)$ mit $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\partial_1f(x)\\ \vdots\\ \partial_nf(x)\end{pmatrix}$,

$$\nabla^2f(x)=\begin{pmatrix}\partial_{11}f(x)&\cdots&\partial_{1n}f(x)\\ \vdots&&\vdots\\ \partial_{n1}f(x)&\cdots&\partial_{nn}f(x)\end{pmatrix}$$

der Gradient bzw. die Hesse-Matrix von f in $x\in M$. Für die partiellen Ableitungen gilt: $\partial_{ij}f(x)=\partial_i\partial_jf(x)=\partial_j\partial_if(x)$.

Mehrdimensionale Extrempunkte. Für $n\in\mathbb{N}$, $M\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f\colon M\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $c\in M$ gilt:
- f hat ein lokales Minimum in c $\implies\nabla^2f(c)$ positiv semidefinit,
- f hat ein lokales Maximum in c $\implies\nabla^2f(c)$ negativ semidefinit,
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2f(c)$ positiv definit $\implies$ f hat ein isoliertes lokales Minimum in c,
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2f(c)$ negativ definit $\implies$ f hat ein isoliertes lokales Maximum in c,
- $\nabla f(c)=0$ und $\nabla^2f(c)$ indefinit $\implies$ f hat einen Sattelpunkt in c.

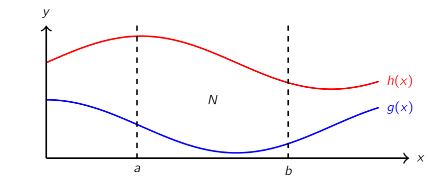
Falls $\nabla f(c)=0$, dann heißt c kritischer Punkt.

Definitheit von Matrizen. Für eine $(n\times n)$-Matrix A heißt $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ das charakteristische Polynom von A. Die Nullstellen von χ_A nennt man Eigenwerte von A. Die Matrix $A-\lambda I_n$ ist nichts anderes als A mit „$-\lambda$" bei jedem Element der Hauptdiagonale. Beispiel: Für $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ gilt: $\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc$.

Für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:
- A positiv semidefinit $\iff$ alle Eigenwerte sind ≥ 0,
- A negativ semidefinit $\iff$ alle Eigenwerte sind ≤ 0,
- A positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte sind >0,
- A negativ definit $\iff$ alle Eigenwerte sind <0,
- A indefinit $\iff$ $\exists$ negative und positive Eigenwerte.

12. Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Zweidimensionale Integrale. Eine Menge der Form $N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x)\}$ heißt Normalbereich.



Für N gilt: $\iint_N f(x,y)\,d(x,y):=\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)}f(x,y)\,dy\right)dx$.

Man kann x und y vertauschen, d.h. die Skizze an der Hauptdiagonale spiegeln. Das Ergebnis des Integrals ist das Volumen eines Körpers mit Grundfläche N und Höhe $f(x,y)$.

Satz von Fubini. Für einen rechteckigen Normalbereich $N=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ gilt: $\iint_N f(x,y)\,d(x,y):=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}f(x,y)\,dx\right)dy$.

Die Reihenfolge der Integrale spielt also keine Rolle. Das lässt sich auf $N=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ verallgemeinern.

13. Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung (AL) hängt von $c\in\mathbb{R}$ (Methoden 1-3) oder $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ (Methoden 4-6) ab und ist somit mehrdeutig.

Die spezielle Lösung (SL) ist eindeutig benötigt $y(t_0)=y_0$ (Methoden 1-3) oder ($y(t_0)=y_0$ und $y'(t_1)=y_1$ (Methoden 4-6). Für die SL muss man bei Methoden 4-6 t_0 und t_1 in AL und Ableitung der AL einsetzen und c_1 und c_2 bestimmen.

Methode 1 („Trennung der Variablen").

$$\boxed{y'(t)=f(t)\cdot g(y(t)).}$$

Jede AL erfüllt $G(y(t))=F(t)+c$ für $c\in\mathbb{R}$, wobei $F(t)=\int f(t)\,dt$ und $G(t)=\int\frac{1}{g(t)}\,dt$ beliebige Stammfunktionen von $f(t)$ und $\frac{1}{g(t)}$ sind. Die SL erfüllt $\int_{y_0}^{y(t)}\frac{1}{g(u)}\,du=\int_{t_0}^t f(s)\,ds$.

Methode 2. $\boxed{y'(t)+a(t)\cdot y(t)=0.}$
1. Bestimme eine beliebige Stammfunktion $A(t)=\int a(t)\,dt$ von $a(t)$.
2. AL: $y(t)=ce^{-A(t)}$ für $c\in\mathbb{R}$. SL: $y(t)=y_0e^{A(t_0)-A(t)}$.

Methode 3.

$$\boxed{y'(t)+a(t)\cdot y(t)=f(t).}$$

1. Bestimme eine beliebige Stammfunktion $A(t)=\int a(t)\,dt$ von $a(t)$.
2. AL: $y(t)=e^{-A(t)}\cdot(c+B(t))$, wobei $B(t)=\int e^{A(t)}\cdot f(t)\,dt$ eine beliebige Stammfunktion von $e^{A(t)}\cdot f(t)$ ist. SL: $y(t)=e^{A(t_0)-A(t)}\cdot(y_0+\int_{t_0}^t e^{A(s)-A(t_0)}\cdot f(s)\,ds)$.

Methode 4.

$$\boxed{y''(t)+ay'(t)+by(t)=0.}$$

Falls $a^2>4b$:
1. Bestimme $\lambda_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$ und $\lambda_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$.
2. AL: $y(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$.

Falls $a^2=4b$:
1. Bestimme $\lambda_0=-\frac{a}{2}$.
2. AL: $y(t)=(c_1+c_2t)e^{\lambda_0t}$.

Falls $a^2<4b$:
1. Bestimme $\alpha=-\frac{a}{2}$ und $\beta=\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$.
2. AL: $y(t)=(c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t))e^{\alpha t}$.

Methode 5.

$$\boxed{y''(t)+ay'(t)+by(t)=a_nt^n+\ldots+a_1t+a_0.}$$

1. Bestimme die AL $y_h(t)$ von
$$y_h''(t)+ay_h'(t)+by_h(t)=0.$$
2. Stelle ein Polynom $y_p(t)=b_nt^n+\ldots+b_1t+b_0$ mit Parametern $b_0,b_1,\dots,b_n$ auf.
3. Setze $y_p(t)$, $y_p'(t)$ und $y_p''(t)$ in $y_p''(t)+ay_p'(t)+by_p(t)=p(t)$ ein und bestimme $b_0,b_1,\dots,b_n$.
4. AL: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$.

Methode 6.

$$\boxed{y''(t)+ay'(t)+by(t)=e^{\alpha t}(a_1\cos(\beta t)+a_2\sin(\beta t)).}$$

1. Bestimme die AL $y_h(t)$ von $y_h''(t)+ay_h'(t)+by_h(t)=0$.
2. Stelle $y_p(t)=e^{\alpha t}(b_1\cos(\beta t)+b_2\sin(\beta t))$ in Abhängigkeit von b_1,b_2 auf.
3. Setze $y_p(t)$, $y_p'(t)$ und $y_p''(t)$ in $y_p''(t)+ay_p'(t)+by_p(t)=e^{\alpha t}(a_1\cos(\beta t)+a_2\sin(\beta t))$ ein und bestimme b_1 und b_2.
4. AL: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$.

Lineare Systeme von Differentialgleichungen. $y'(t)=Ay(t)$ für eine Matrix A, d.h.

$$\boxed{\begin{array}{rcl}y_1'(t)&=&a_{11}y_1(t)+\ldots+a_{1n}y_n(t)\\ \vdots&&\vdots\\ y_n'(t)&=&a_{1n}y_1(t)+\ldots+a_{nn}y_n(t)\end{array}}$$

1. Berechne die Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ von A.
2. Berechne die zugehörigen Eigenvektoren $v_1,\dots,v_k$. Für alle $i=1,\dots,k$ soll gelten: $(A-\lambda_iI_n)v_i=0$.
3. AL: $y(t)=c_1e^{\lambda_1t}v_1+\ldots+c_ke^{\lambda_kt}v_k$ für $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$. Für die SL Anfangsbedingungen in die AL einsetzen.