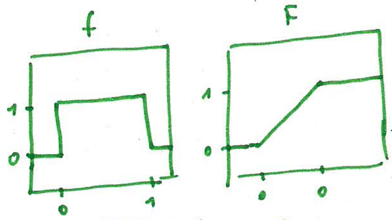
Kontinuierlich

Dichte und Verteilung: $\underline{\underline{F_X(x) = \Pr[X \le x]}} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

Gleichverteilung:
$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x \ge b \end{cases} \quad \mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2},\ Var[X] = \frac{(a-b)^2}{12}}$$



Gleichverteilung in [0,1]

Simulation von ZV:
$$\tilde{X} = F_X^{-1}(U) \Rightarrow F_{\tilde{X}}(t) = F_X(t) \quad (U \text{ gleichverteilt})$$

Erwartungswert: $\underline{\underline{\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt}}$, $\quad \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,dt$

Varianz: $Var[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t)\,dt = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Unabhängigkeit:
$$\Pr[X \le x, Y \le y] = \Pr[X \le x] \cdot \Pr[Y \le y] \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Summe unabhängiger ZV: $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx \quad (X + Y =: Z)$

Normalverteilung:
$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x;\mu,\sigma) \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \Phi(x;\mu,\sigma) \end{aligned}}$$

$X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}X = 0,\ Var[X] = 1$

$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}X = \mu,\ Var[X] = \sigma^2$

Additivität von $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:
$$Z := a_1X_1 + \ldots + a_nX_n \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \text{ mit } \mu = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n \text{ und } \sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$
$(X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2))$

Zentraler Grenzwertsatz:
- $X_1, \ldots, X_n \sim$ bel. Vert. mit μ, σ^2
- $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ (X_i unabh.!)
- $n \ge 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$n=1$: $\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)\right)$

Grenzwertsatz v. de Moivre:
- $\underbrace{X_1, \ldots, X_n}_{\text{unabh.}} \sim Ber(p)$ mit p
- $H_n = X_1 + \ldots + X_n$
- $n \ge 1$

$\Rightarrow H_n^* := \frac{H_n - \overbrace{np}^{\mu}}{\underbrace{\sqrt{np(1-p)}}_{Var}}$

Exponentialverteilung:
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda},\ \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2},\ Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

$\left(X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right)$

Gedächtnislosigkeit:
$$X \sim Exp(\lambda) \Longleftrightarrow \Pr[X > x+y \mid X > y] = \Pr[X > x]$$

- mehrdimens.
- Randvert.

Minimum:
- $\underbrace{X_1, \ldots, X_n}_{\text{unabh.}} \sim Exp(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

$\Rightarrow X \sim Exp(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$

Statistik

Definitionen:
- Zufallsvariable X mit Dichte $f(x;\theta)$
- Schätzvariable / Schätzer U
- Erwartungstreu, wenn $\mathbb{E}[U] = \theta$
- Mean squared error: $MSE := \mathbb{E}[(U-\theta)^2] \overset{U \text{ erw.treu}}{=} \mathbb{E}[(U-\mathbb{E}[U])^2] = \mathrm{Var}[U]$
- A effizienter als B wenn MSE von A $<$ MSE von B
- Schätzer konsistent im quadratischen Mittel wenn $MSE \to 0$ $(n \to \infty)$ n: Umfang Stichpr.

Wichtige Schätzer:

$\bar{X} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ (Stichprobenmittel) erwartungstreuer Schätzer für den Erw. Wert

$S^2 := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ (Stichprobenvarianz) " " " die Varianz

$(X_1, \dots, X_n$ = Stichprobe$)$

Maximum-Likelihood:

$$L(\vec{x};\theta) := \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} Pr_\theta[X_i = x_i] \overset{\text{unabh.}}{=} Pr_\theta[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

$$\forall \theta.\ L(\vec{x};\theta) \leq L(\vec{x};\hat{\theta}) \Rightarrow \hat{\theta} \text{ ist ML-Schätzwert}$$

Diskret

Tot. W'keit: $Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$ // $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot Pr[A_i]$

$\mathbb{E}$ und Var: $X_1, \dots, X_n$ unabh. $\Rightarrow$ $\mathrm{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \dots + \mathrm{Var}[X_n]$, $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$

Verteilungen:
- Bernoulli: $f_X(x) = \begin{cases} p & , x=1 \\ 1-p & , x=0 \end{cases}$, $\mathbb{E}[X] = p$, $\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$
- Binomial: $f_X(x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $\mathbb{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}[\cancel{npq}\,X] = npq$
- Geometrisch: $f_X(i) = pq^{i-1}$, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{q}{p^2}$
- Poisson: $f_X(i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$, $\mathbb{E}[X] = \lambda = \mathrm{Var}[X]$

Markov: $Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t} \iff Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$

Chebychev: $Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2} \iff Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \leq 1/t^2$

Chernoff: $Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu \iff Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^\mu$

Gesetz d. gr. Zahlen: $n \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon \delta^2} \Rightarrow Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon$ $\left(X_1, \dots, X_n \text{ unabh.}, Z := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \varepsilon, \delta > 0\right)$

Erzeugende Fkt: $G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^k]$

- $X \sim Ber(p) \Rightarrow G_X(s) = 1-p+ps$
- $X \sim$ Gleich $\Rightarrow G_X(s) = \frac{s^{n+1}-1}{(n+1)(s-1)}$
- $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow G_X(s) = (1-p+ps)^n$
- $X \sim Geo(p) \Rightarrow G_X(s) = ps/1-(1-p)s$
- $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

Momenten:

$G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$

$G'_X(0) = Pr[X=1]$

$G^{(i)}_X(0) = Pr[X=i] \cdot i!$