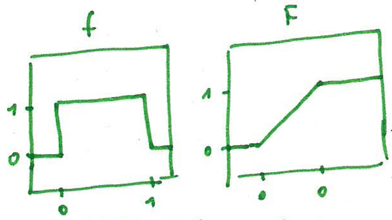
Kontinuierlich

Dichte und Verteilung: $\underline{F_X(x) = \Pr[X \leq x]} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

Gleichverteilung:

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}}$$

$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var[X] = \frac{(a-b)^2}{12}$



Gleichverteilung in $[0,1]$

Simulation von ZV:

$$\tilde{X} = F_X^{-1}(U) \Rightarrow F_{\tilde{X}}(t) = F_X(t) \quad (U \text{ gleichverteilt})$$

Erwartungswert: $\underline{\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt}$, $\quad \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,dt$

Varianz: $Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t)\,dt = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Unabhängigkeit:

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq y] \iff F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Summe unabhängiger ZV: $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-y)\,dx \quad (X+Y =: Z)$

Normalverteilung:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x;\mu,\sigma) \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \Phi(x;\mu,\sigma) \end{aligned}}$$

$X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}X = 0, Var[X] = 1$

$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}X = \mu, Var[X] = \sigma^2$

Additivität von $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:

$$Z := a_1X_1 + \ldots + a_nX_n \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \text{ mit } \mu = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n \text{ und } \sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

$(X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2))$

Zentraler Grenzwertsatz:

- $X_1, \ldots, X_n \sim$ bel. Vert. mit μ, σ^2
- $Y_n := X_1 + \ldots + X_n$ (X_i unabh.!)
- $n \geq 1$

$$\Rightarrow \underline{Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$n=1$: $\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)\right)$

Grenzwertsatz v. de Moivre:

- $\underbrace{X_1, \ldots, X_n}_{\text{unabh.}} \sim Ber(p)$ mit p
- $H_n = X_1 + \ldots + X_n$
- $n \geq 1$

$$\Rightarrow H_n^* := \frac{H_n - \overbrace{np}^{\mu}}{\underbrace{\sqrt{np(1-p)}}_{Var}}$$

Exponentialverteilung:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{2}{\lambda^2} \\ Var[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}}$$

$\left(X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right)$

Gedächtnislosigkeit:

$$X \sim Exp(\lambda) \iff \Pr[X > x+y \mid X > y] = \Pr[X > x]$$

- mehrdimens.
- Randvert.

Minimum:

- $\underbrace{X_1, \ldots, X_n}_{\text{unabh.}} \sim Exp(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $X := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

$$\Rightarrow X \sim Exp(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$