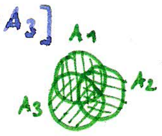
Ziehen von k Elementen aus n: $\underbrace{n^k,\ n^{\underline{k}}}_{\text{geordnet}},\ \underbrace{\binom{n+k-1}{n-1},\ \binom{n}{k}}_{\text{ungeordnet}}$ (mit, ohne, mit, ohne zurücklegen)

Siebformel: $\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] - \Pr[A_1 \cap A_2] - \Pr[A_1 \cap A_3] - \Pr[A_2 \cap A_3] + \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$



Bed. W'keit: $\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \Rightarrow \Pr[A \cap B] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A]$

$\Downarrow$

$(\Pr[B|B] = 1,\ \Pr[A|\Omega] = \Pr[A],\ \Pr[\emptyset|B] = 0,\ \Pr[\bar{A}|B] = 1 - \Pr[A|B])$

Multiplikationssatz: $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$

Satz v.d. totalen W'keit: $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (A_i paarweise disjunkt, $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$)

Unabhängigkeit: $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \Leftrightarrow \Pr[A|B] \overset{\text{Bed.}}{=} \Pr[A]$ $(\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n])$

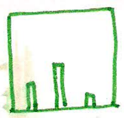
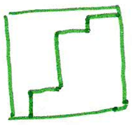
wenn A, B, C unabhängig, dann auch $A \cap B, C$ und auch $A \cup B, C$.

Satz von Bayes:

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$
($i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_1, \ldots, A_n$ ~~paarweise~~ disjunkt, $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$)

Dichte und Verteilung:

$$f_X(x) := \Pr[X = x], \quad F_X(x) := \Pr[X \leq x]$$

f  F 

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]$ (Monotonie: $X(\omega) \leq Y(\omega)$ $(\forall \omega) \Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$)

$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x|A]$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (A_i disj. Partitionen v. Ω)

Varianz: $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 \cdot \Pr[X = x] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ ($\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$: Standardabweichung)

$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$ ($\mathbb{E}[X^k]$ das k-te Moment, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das k-te zentrale Moment) 1: $\mathbb{E}$ 2: Var

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$:

$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]$ ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, dann auch: $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$)

Zusammengesetzte Zufallsvariablen:

X, Y unabhängig, $Z := X + Y$, dann gilt: $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$

Linearität des Erwartungswertes: $\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n]$ ($X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$)

Multiplikativität des Erwartungswerts: $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$ ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig)

Additivität der Varianz: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$ ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $X := X_1 + \ldots + X_n$)

Indikatorvariablen: $I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls A eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\Rightarrow \mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot \Pr[A] + 0 \cdot \Pr[\bar{A}] = \Pr[A]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \ldots \cdot I_{A_n}] = \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$

Wichtige Reihen:

1) $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k = \frac{1}{1-x}}$ $|x| < 1$

2) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$ $|x| < 1$

3) $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot x^k = (1+x)^n}$ $|x| < 1$

4) $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = e^x}$

- Geometrische Reihe
- Ableitung der geometrische Reihe
- Binomialreihe
- Exponentialreihe

$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}}$

Verteilungen:

1) Bernoulli: $f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x=1, \\ 1-p & \text{für } x=0. \end{cases}$, $\mathbb{E}[X] = p$, $Var[X] = p(1-p) = pq$

2) Binomial: $f_X(x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$, $\mathbb{E}[X] = np$, $Var[X] = npq$

3) Geometrische: $f_X(i) = pq^{i-1}$, $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$, $Var[X] = \frac{q}{p^2}$

4) Poisson: $f_X(i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$, $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $Var[X] = \lambda$

Abschätzen von W'keiten:

- Markov: $Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t} \iff Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$
- Chebyshev: $Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{Var[X]}{t^2} \iff Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{Var[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$

Gesetz d. großen Zahlen:

$$n \geq \frac{Var[X]}{\varepsilon \delta^2} \implies \boxed{Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon}$$

($X_1, \dots, X_n$ unabhängig, $Z := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, $\varepsilon, \delta > 0$)

Chernoff-Schranken:

$$Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu \iff Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^\mu$$

($X_1, \dots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen, $X := X_1 + \dots + X_n$, $\delta > 0$ bzw. $0 < \delta < 1$)

$$(1-\delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta + \frac{1}{2}\delta^2}, \quad (1+\delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta + \frac{1}{3}\delta^2} \quad (0 \leq \delta < 1)$$

Coupon Collector:

X_i = # Käufe hasta la sgte Figurita nola.

$X_i \sim Geo\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$, $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$

$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n$ [illegible] n

Erzeugende Funktionen:

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X]$$

1) Bernoulli: $G_X(s) = (1-p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1 - p + ps$

2) Gleichverteilung: $G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{(n+1)(s-1)}$

3) Binomial: $G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (1 - p + ps)^n$

4) Geometrische: $G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \cdot s^k = ps \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} = \frac{ps}{1-(1-p)s}$

5) Poisson: $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot s^k = e^{-\lambda + \lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$

Zusammenhang zw. w.e. Funkt und den Momenten:

$$G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot Pr[X=k] \cdot s^{k-1} \implies G'_X(0) = Pr[X=1] \implies G_X^{(i)}(0) = Pr[X=i] \cdot i!$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot Pr[X=k] = \mathbb{E}[X] \qquad\qquad \frac{G_X^{(i)}(0)}{i!} = Pr[X=i]$$