AI - TÜ 13

$\boxed{\text{D13.1}}$

Gemeint ist die Nummerierung im AI Trainer. Benutzt ihr sie bitte bei euren Abgaben oder in der Klausur nicht, weil Herr Kreiner und die Korrektoren sie nicht haben.

(a) Mit Methode 1 :

$$y'(t) + t y(t) = t \iff y'(t) = t - t y(t) = \overset{f(t)}{t} \cdot \underbrace{(1 - y(t))}_{g(y(t))}.$$

1. $F(t) = \frac{1}{2}t^2$.
2. $G(t) = \int \frac{1}{1-t}\,dt = \int \frac{-1}{t-1}\,dt = -\ln|t-1|$

siehe typische Stammfunktionen im AI Trainer

3. Jede allgemeine Lösung erfüllt :

$$-\ln|y(t)-1| = \frac{1}{2}t^2 + c$$
$$\iff \ln|y(t)-1| = -\frac{1}{2}t^2 - c$$
$$\iff |y(t)-1| = e^{-\frac{1}{2}t^2 - c}$$
$$\iff y(t) - 1 = \pm e^{-\frac{1}{2}t^2 - c}$$
$$\iff \underline{\underline{y(t) = 1 \pm e^{-\frac{1}{2}t^2 - c}}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(1)

Mit Methode 3 :

$a(t) = t$, $f(t) = t$.

1. $A(t) = \frac{1}{2}t^2$.
2. $B(t) = \int e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot t\,dt = e^{\frac{1}{2}t^2}$.
3. Allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \left(c + e^{\frac{1}{2}t^2}\right) = \underline{\underline{c e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(2)

__Info:__ Die Terme (1) und (2) sehen zwar nicht gleich aus, aber die Menge aller $y(t)$, die man für $c \in \mathbb{R}$ erhält, ist schon dieselbe.

Wählt man bei (1) beispielsweise $c=5$, so erhält man die zwei Lösungen

$$y(t) = 1 + e^{-\frac{1}{2}t^2 - 5} \quad \text{und} \quad y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2 - 5}.$$

Diese kann man auch aus (2) gewinnen indem man $c = \pm e^{-5}$ wählt. Für $c = e^{-5}$ bekommt man

$$y(t) = e^{-5} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 = 1 + e^{-\frac{1}{2}t^2 - 5}$$

und für $c = -e^{-5}$:

$$y(t) = -e^{-5} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}t^2 - 5}.$$

(b) <u>Mit Methode 4</u>:

$$y''(t) = 4y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad y''(t) + \underset{\substack{\uparrow \\ a=0}}{0}\,y'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ b=-4}}{-4}\,y(t) = 0. \qquad (a^2 > 4b)$$

1. $\lambda_1 = -0 + \sqrt{0^2+4} = \underline{\underline{2}}, \quad \lambda_2 = -0 - \sqrt{0^2+4} = \underline{\underline{-2}}.$

2. Allgemeine Lösung:

$$\underline{\underline{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}}}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) <u>Mit Methode 5</u>:

Polynom von Grad 1

$$y''(t) \underset{\substack{\uparrow \\ a=1}}{+} y'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ b=1}}{+} y(t) = t.$$

1. Allgemeine Lösung von $y_h''(t) + y_h'(t) + y_h(t) = 0$ bestimmen.

   1. $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \omega i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \omega i \quad$ mit $\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

   2. $y_h(t) = \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-\frac{1}{2}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2. $y_p(t) = b_1 t + b_0$ (Grad 1 wie Störfunktion t)

3. $y_p(t) = b_1 t + b_0, \quad y_p'(t) = a_1, \quad y_p''(t) = 0.$

$$\rightsquigarrow \quad 0 + b_1 + b_1 t + b_0 = t$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ =1}}{b_1}\, t + \underbrace{(b_1 + b_0)}_{=0} = 1 \cdot t + 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad b_1 = 1, \; b_0 = -1.$$

$$\rightsquigarrow \quad y_p(t) = t - 1.$$

4. Allgemeine Lösung :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= \left(c_1 \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-\frac{1}{2}t} + t - 1 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

(d) Mit Methode 1 :

$$\underbrace{y'(t)}_{f(t)=1} = \underbrace{\tan(y(t))}_{g(y(t))} , \quad y(0) = \frac{\pi}{2} .$$

siehe typische Stammfunktionen im AI Trainer

1. $F(t) = t$.
2. $G(t) = \int \frac{1}{\tan(t)} dt = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = \ln|\sin(t)|$.
3. Jede allgemeine Lösung erfüllt :

$$\ln|\sin(y(t))| = t + c , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Für $t=0$ gilt dann:

$$\ln\Big|\overbrace{\sin(\underbrace{y(0)}_{\frac{\pi}{2}})}^{1}\Big| = c \quad \Leftrightarrow \quad c = \ln 1 = 0 .$$

Die Gleichung $\ln|\sin(y(t))| = t$ wird beispielsweise von

$$y(t) = \arcsin(e^t)$$

erfüllt.

(e) Hier funktioniert die Rechnung aus (d) leider nicht, da $\sin(y(t))$ für $y(0)=0$ gleich Null ist und $\ln(0)$ nicht definiert ist.

Glücklicherweise müssen wir nur eine Lösung angeben.
Die Methode des intelligenten (bzw. zufälligen) Ratens liefert:

$$y(t) = 0.$$

$\boxed{\text{D13.2}}$ **Methode 1** :

(a)

$$y'(t) = \overbrace{(a - by(t))\,y(t)}^{g(y(t))\ ,\quad f(t)=1}\ ,\quad y(0) = y_0$$

mit $a, b, y_0 > 0$

1. $F(t) = t$

2. $G(t) = \int \frac{1}{(a-bt)\,t}\,dt$

rumprobieren oder Partialbruchzerlegung

$$= \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \frac{a}{b}}\,dt$$

$$= \ln|t| - \ln\left|t - \frac{a}{b}\right|$$

3. Jede allgemeine Lösung für $y(t)$ erfüllt

$$\ln|y(t)| - \ln\left|y(t) - \frac{a}{b}\right| = t + c$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left|\frac{y(t)}{y(t) - \frac{a}{b}}\right| = t + c$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{y(t)}{y(t) - \frac{a}{b}}\right| = e^{t+c}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y(t)}{y(t) - \frac{a}{b}} = e^{t+c} \qquad (*)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(t) = e^{t+c}\left(y(t) - \frac{a}{b}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(t) - e^{t+c} y(t) = -\frac{a}{b} e^{t+c}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(t) \cdot \left(1 - e^{t+c}\right) = -\frac{a}{b} e^{t+c}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(t) = \frac{-\frac{a}{b} e^{t+c}}{1 - e^{t+c}} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Um c zu bestimmen (d.h. um die spezielle Lösung zu bestimmen), kann man $y(0) = y_0$ beispielsweise in $(*)$ einsetzen. Man erhält für $t=0$:

$$\frac{y_0}{y_0 - \frac{a}{b}} = e^c \quad \Leftrightarrow \quad c = \ln\left(\frac{y_0}{y_0 - \frac{a}{b}}\right).$$

Daraus folgt:

$$y(t) = \frac{-\frac{a}{b} e^{t + \ln(\dots)}}{1 - e^{t + \ln(\dots)}}$$

$$= \frac{a}{b - \left(\frac{a}{y_0} - b\right) e^{-t}} .$$

„spezielle Lösung"

(b) Falls $y_0 = \frac{a}{b}$ gilt: $y(t) = \dfrac{a}{b-(b-b)e^{-t}} = \dfrac{a}{b} \xrightarrow{t\to\infty} \dfrac{a}{b}$.

Falls $y_0 \neq \frac{a}{b}$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a}{b-\left(\frac{a}{y_0}-b\right)\underbrace{e^{-t}}_{\to 0}} = \frac{a}{b}.$$