AI - TÜ 2

$\boxed{\text{D2.1}}$

(a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

mit Def. 2.2

Beweis: z.z.: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \varepsilon$

$\boxed{\text{Sei } \varepsilon > 0 \text{ beliebig}}$.

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \overset{n\geq 1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \overset{\varepsilon>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \overset{\text{da beide Seiten positiv}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\varepsilon^2} < n .$$

$\boxed{\text{Wähle } \cancel{\text{ein}}\ n_0 \in \mathbb{N}}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ (z.B. $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \rceil + 1$).

$\boxed{\text{Sei nun } n \geq n_0 \text{ beliebig}}$.

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} .$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon} . \qquad \square$$

(b) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Es gilt:

$$\underbrace{0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \overset{\text{3. binomische Formel}}{=} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \overset{\sqrt{n+1} > 0}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow n \leq n+1$ ✓

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{(a)}{=} 0$ und $0 \leq b_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

folgt aus dem Einschließungskriterium („Sandwich-Kriterium"):

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Alternative: direkt, ohne 3. binomische Formel

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \iff \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \qquad | (\dots)^2 \text{, da beide Seiten positiv}$$

$$\iff n+1 \leq \frac{1}{n} + 2\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n} + n$$

$$\iff n+1 \leq \frac{1}{n} + 2 + n$$

$$\iff -1 \leq \frac{1}{n}$$

$$\iff n \geq -1 \quad \checkmark$$

(c) $c_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Für $n \geq 2$ gilt:

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} \leq \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot2}{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2\cdot n} = \frac{4}{n}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underset{\text{Vorlesung}}{=} 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} \overset{\text{Satz 2.3 (ii)}}{=} 4\cdot 0 = 0$

$\Longrightarrow$ Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$ und $0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$

folgt wieder aus dem Einschließungskriterium: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

D2.2

Annahmen: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ und $a \neq 0$.

müssen nicht gleich sein!

zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$.

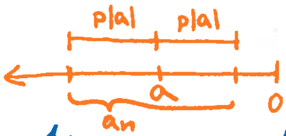
Beweis: $\boxed{\text{Sei } \varepsilon > 0 \text{ beliebig.}}$

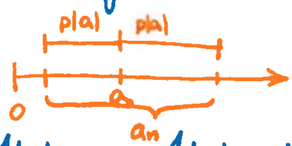
funktioniert für jedes $p \in (0,1)$. Muss nicht $\frac{1}{2}$ sein!

$\Rightarrow$ Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt (wegen $\frac{1}{2}|a|, \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2} > 0$):

Es gibt ein $n_0' \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0'$ gilt: $|a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$

und es gibt ein $n_0'' \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0''$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2}$.

Intuition: falls $a<0$ 

und falls $a>0$ 

$\Rightarrow$ Wegen $|a_n - a| < \frac{1}{2}|a| \Leftrightarrow a - \frac{1}{2}|a| < a_n < a + \frac{1}{2}|a| \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a| < |a_n| < \frac{3}{2}|a|$

gilt für alle $n \geq n_0', n_0''$: $\underbrace{\frac{1}{2}|a| < |a_n|}_{(1)}$ und $\underbrace{|a_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{|a|^2}{2}}_{(2)}$.

damit (1) und (2) beide gelten

$\boxed{\text{Wähle } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } n_0 \geq n_0', n_0''}$ (z.B. $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ oder $n_0 = n_0' + n_0''$).

$\boxed{\text{Sei nun } n \geq n_0 \text{ beliebig.}}$ Dann gilt:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{1}{aa_n}(a_n - a)\right| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|a_n|} \cdot |a_n - a| \overset{(1)}{<} \frac{2}{|a|^2} \cdot |a_n - a| \overset{(2)}{<} \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.}$ $\square$

Erinnerung:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{falls } x<0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Erklärung von $a - \frac{1}{2}|a| < a_n < a + \frac{1}{2}|a|$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}|a| < |a_n| < \frac{3}{2}|a|$$

Fall 1: $a < 0$.

$\Longrightarrow |a| = -a$.

$\Longrightarrow a = -|a|$.

$$a - \frac{1}{2}|a| < a_n < a + \frac{1}{2}|a| \Longleftrightarrow -|a| - \frac{1}{2}|a| < a_n < -|a| + \frac{1}{2}|a|$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{3}{2}|a| < a_n < -\frac{1}{2}|a|$$

$\Longrightarrow$ a_n liegt zwischen zwei negativen Zahlen

$\Longrightarrow a_n < 0$.

$\Longrightarrow a_n = -|a_n|$.

$$-\frac{3}{2}|a| < -|a_n| < -\frac{1}{2}|a| \Leftrightarrow \frac{3}{2}|a| > |a_n| > \frac{1}{2}|a|$$

Fall 2: $a > 0$.

$\Longrightarrow |a| = a$

$$a - \frac{1}{2}|a| < a_n < a + \frac{1}{2}|a| \Leftrightarrow |a| - \frac{1}{2}|a| < a_n < |a| + \frac{1}{2}|a|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}|a| < a_n < \frac{3}{2}|a|$$

$\Longrightarrow a_n > 0$.

$\Longrightarrow a_n = |a_n|$.

In beiden Fällen gilt die Äquivalenz ☺

$\boxed{D2.3}$

(a) $a_n = n$, $a_n = n^2$, $a_n = 2^n$, ...

Jede Teilfolge von a_n divergiert.

(b)

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der geraden Indizes konvergiert gegen 0. Die Teilfolge $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ der ungeraden Indizes divergiert. Der einzige Häufungspunkt ist 0.

(c) $a_n = (-1)^n$

Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$.

1 und -1 sind die einzigen Häufungspunkte.

(d) Achtung: schwer!

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \ldots)$.
Jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist Häufungspunkt.

Für Interessierte:

$$a_n = n - \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$$

Beweis: trivial ;-)

oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, \ldots, 16, 1, \ldots, 32, 1, \ldots)$
mit $a_n = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} + 1$