AI - TÜ 4

$\boxed{\text{D4.1}}$

(a) $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{\cancel{3}\,2}\cdot(3i)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^3\cdot\cancel{(3i)^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)^2\cdot 3i}{n^3}\right|$$

$|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$$\overset{}{=} \frac{|(n+1)^2|\cdot|3i|}{|n^3|} \underset{|3i|=3}{=} \frac{(n+1)^2\cdot 3}{n^3} = \frac{3n^2+6n+3}{n^3} = 3\cdot\frac{1}{n} + 6\cdot\frac{1}{n^2} + 3\cdot\frac{1}{n^3}\,.$$

alle konvergieren gegen Null

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ Reihe konvergiert absolut (Quotientkriterium).

(b) $$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n\right|} = \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|\,.$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| \underset{\text{Tü 2}}{=} 0 < 1$$

da $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ konvergiert (Tü 2)

$\Rightarrow$ Grenzwert $=$ einziger Häufungspunkt

$\Longrightarrow$ Reihe konvergiert absolut (Wurzelkriterium).

(c) Für a_n gilt:

$$\boxed{a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n^4} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{n^2} \overset{(*)}{\leq} -\frac{1}{n^4} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad |a_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (siehe VL), konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut (Majorantenkriterium).

(*) Diese Ungleichung kann man leicht überprüfen:

$$-\frac{1}{n^2} \leq -\frac{1}{n^4} \iff -n^4 \leq -n^2 \iff n^2 \leq n^4. \checkmark$$

Würde sie nicht gelten, dann hätte man es mit

$$-\frac{1}{n^4} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^4} \quad \left(\text{d.h. } |a_n| \leq \frac{1}{n^4}\right)$$

versuchen können, was in diesem Fall nicht geht, da $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^4}$ nicht stimmt.

<u>Info</u>: das Leibniz-Kriterium ist hier nicht anwendbar, da $\left(k^{-3+(-1)^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{81}, \frac{1}{16}, \frac{1}{625}, \frac{1}{36}, \dots\right)$ nicht monoton fällt.

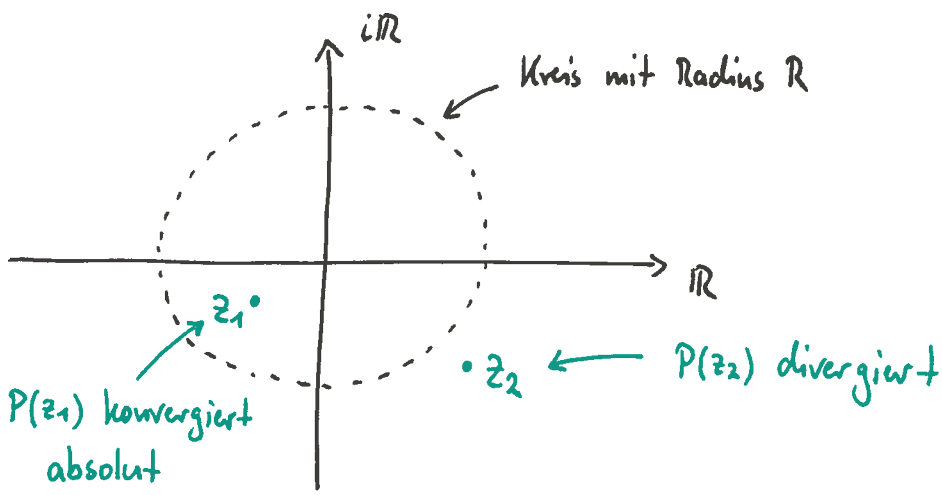
$\boxed{\text{D4.2}}$

Potenzreihe: $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots$

$\uparrow$ Folge alle Koeffizienten

Konvergenzradius: $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$. Für R gilt:

- $|z| < R \implies P(z)$ konvergiert absolut,
- $|z| > R \implies P(z)$ divergiert.



(a) $c_k = k! \implies R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!}} = ???$

2. Versuch: Für welche z konvergiert / divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$?

Für $z \neq 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\, z^{n+1}}{n!\, z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)z| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot \underbrace{|z|}_{|z|>0} = \infty > 1.$$

$\implies \sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$ divergiert für alle $z \neq 0$ (d.h. für alle $|z|>0$).

$\implies \underline{\underline{R = 0}}.$

(b) **Achtung, Falle:** $c_k \neq 2^k$, denn die Potenzreihe ist **nicht** $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k$!

Tipp: ausschreiben!

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2^k} = 0 + z + 2z^2 + 0z^3 + 4z^4 + 0z^5 + 0z^6 + 0z^7 + 8z^8 + 0z^9 + \dots$$

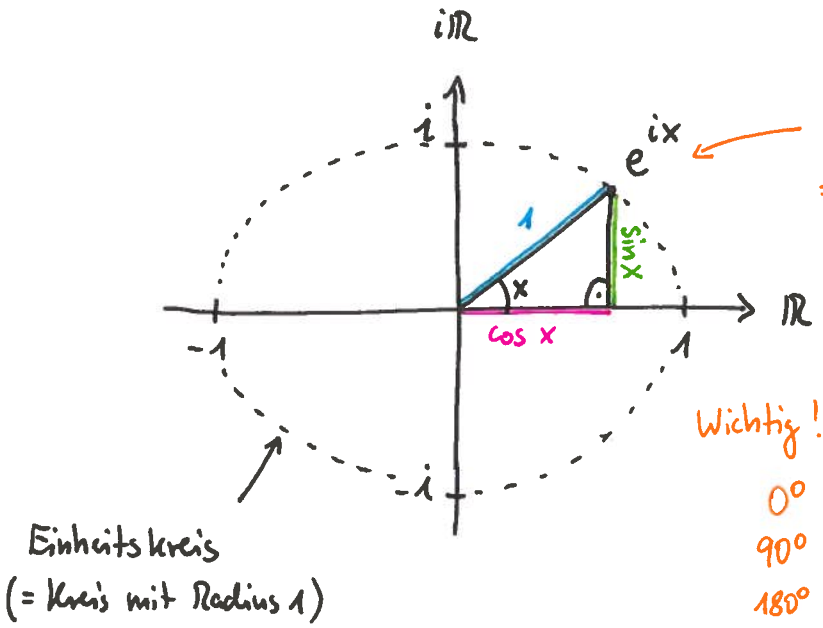
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit} \quad c_k = \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ Zweierpotenz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{|c_k|} = \begin{cases} \sqrt[k]{k} & \text{falls } k \text{ Zweierpotenz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}} = 1 \,.$$

$\boxed{\text{D4.3}}$

(a)



komplexe Zahl mit $|e^{ix}| = 1$ (Satz 4.11)

$\Rightarrow$ liegt auf dem Einheitskreis

Wichtig! x immer in Bogenmaß:

$0° \mathrel{\hat{=}} 0,$
$90° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2},$
$180° \mathrel{\hat{=}} \pi,$
$270° \mathrel{\hat{=}} \frac{3\pi}{2},$
$360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi.$

(b) Info: Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ sind $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$ beide reell!

Aus Satz 4.13 folgt:

$$(\sin x)^2 \overset{(iii)}{\leq} (\sin x)^2 + \underbrace{(\cos x)^2}_{\substack{\geq 0 \text{ wegen (iii):} \\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x \in \mathbb{R}}} \overset{(i)}{=} 1 \qquad \Big|\sqrt{\ldots}$$

$$\Longrightarrow \quad |\sin x| \leq 1. \qquad \square$$

(c) Aus Satz 4.13 folgt:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \overset{(ii)}{=} \underbrace{\boxed{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \overset{(v)}{=} 1}}_{(1)} \quad \text{und}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \overset{(ii)}{=} \underbrace{\boxed{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 \overset{(v)}{=} 0}}_{(2)}.$$

$$\Longrightarrow \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}^{\text{aus } (1)} \quad \text{und} \quad \overbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}^{\text{aus } (2)}.$$

$$\Longrightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2.$$

$$\Longrightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = \frac{1}{4}.$$

$$\Longrightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$. Nach (a) gilt: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$.

$$\Longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$