AI - TÜ3

D3.1 Wertetabelle:

n	0	1	2	3	4	...
a_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{255}{128}$	$\frac{65535}{32768}$	...
		1,5	1,875	1,992...	1,99996...	

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nach oben beschränkt

Vermutung: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq 2$

Induktionsbeweis:

Ind.-Anfang

IA: $a_0 = 1 \leq 2$. ✓

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Ind.-Voraussetzung

IV: Es gelte $a_n \leq 2$.

Ind.-Schluss

IS:

„soll sein"

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \overset{IV}{\leq} \underbrace{4 - \frac{1}{2}a_n^2 \overset{!}{\leq} 2}$$

Vorsicht:

$-\frac{1}{2}a_n^2 \geq -\frac{1}{2}\cdot 2^2$

$\iff 2 \leq \frac{1}{2}a_n^2$

$\iff 4 \leq a_n^2$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\iff 2 \leq |a_n|$

$\iff 2 \leq a_n$ oder $a_n \leq -2$

würde eine dieser Aussagen stimmen, dann hätten wir $a_n \leq 2$ bewiesen. Leider sind beide falsch. z.B.: $-2 < a_1 < 2$.

$\Longrightarrow$ Versuch gescheitert!

2. Versuch: direkt

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Dann gilt:

$$a_n \le 2 \iff \underbrace{a_0 \le 2}_{\text{wahr}} \text{ und } a_{n+1} \le 2$$

$$\iff a_{n+1} \le 2$$

true $\wedge$ F $\equiv$ F

$$\iff 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \le 2$$

$$\iff 0 \le \frac{1}{2}a_n^2 - 2a_n + 2 = \frac{1}{2}(a_n^2 - 4a_n + 4) = \frac{1}{2}(a_n - 2)^2$$

Wahre Aussage! $\square$

$a_n \le 2$ ist also äquivalent zu einer wahren Aussage. $\Rightarrow a_n \le 2$ gilt!

- <u>$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton steigend</u>

z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_{n+1} \ge a_n$

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt:

Variante 1: mit Äquivalenzumformungen

$$a_{n+1} \ge a_n \iff 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \ge a_n \quad \Big| : a_n$$

(*)

$$\iff 2 - \frac{1}{2}a_n \ge 1$$

$$\iff 1 \ge \frac{1}{2}a_n$$

$$\iff 2 \ge a_n.$$ Wahre Aussage! $\square$

$a_{n+1} \ge a_n$ ist also äquivalent zu einer wahren Aussage. $\Rightarrow a_{n+1} \ge a_n$ gilt!

(*) Diese Äquivalenz gilt nur, falls $a_n > 0$.

Beweis von $a_n > 0$ (Induktion):

IA: $a_0 = 1 > 0$. ✓

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

IV: Es gelte $a_n > 0$.

IS:

$$a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 = \underbrace{a_n}_{\substack{>0 \\ \text{nach IV}}} \overbrace{\left(2 - \overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{a_n}_{\leq 2}}^{\leq 1}\right)}^{\geq 1} \overset{\text{IV}}{>} 0 \cdot 1 = 0. \qquad \square$$

Variante 2: als Abschätzung

$$\boxed{a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 = a_n \overbrace{\left(2 - \overbrace{\frac{1}{2}\underbrace{a_n}_{\leq 2}}^{\leq 1}\right)}^{\geq 1} \overset{a_n > 0}{\geq} a_n \cdot 1 = a_n. \qquad \square}$$

Bitte NIEMALS so!

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &\geq a_n \\ 2a_n - \frac{1}{2}a_n^2 &\geq a_n \\ a_n\left(2 - \frac{1}{2}a_n\right) &\geq a_n \\ a_n\left(2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) &\geq a_n \\ a_n &\geq a_n \end{aligned}}$$

Varianten 1 und 2 sind immer ok. Diese hier <u>nie</u>!

Diese Methode hat zwei Nachteile:

1) Wenn man keine Pfeile benutzt ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$), dann kann man nicht wissen, was gezeigt wurde und was die Annahme war.

2) Man kann aber nicht pauschal überall „$\Leftrightarrow$" hinschreiben, weil hier beispielsweise gilt:

$$a_n\left(2 - \frac{1}{2}a_n\right) \geq a_n \quad \Leftarrow \quad a_n\left(2 - \frac{1}{2}\cdot 2\right) \geq a_n.$$

Dieses Problem tritt immer dann auf, wenn abgeschätzt wurde (hier $a_n \leq 2$).

Aus dem Monotoniesatz folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

Bestimmung des Grenzwerts

Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann folgt mit Satz 2.3 (i)-(iii):

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2a_n - \frac{1}{2}a_n^2\right) \overset{\text{S.2.3}}{=} 2\lim_{n\to\infty} a_n - \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = 2a - \frac{1}{2}a^2$$

a_{n+1} ist dieselbe Folge wie a_n,
aber „um 1 nach rechts verschoben".
$\Longrightarrow$ Grenzwerte sind gleich!

Wegen $a = 2a - \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a^2 - a = 0$

$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{2}a - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ oder $\frac{1}{2}a - 1 = 0$

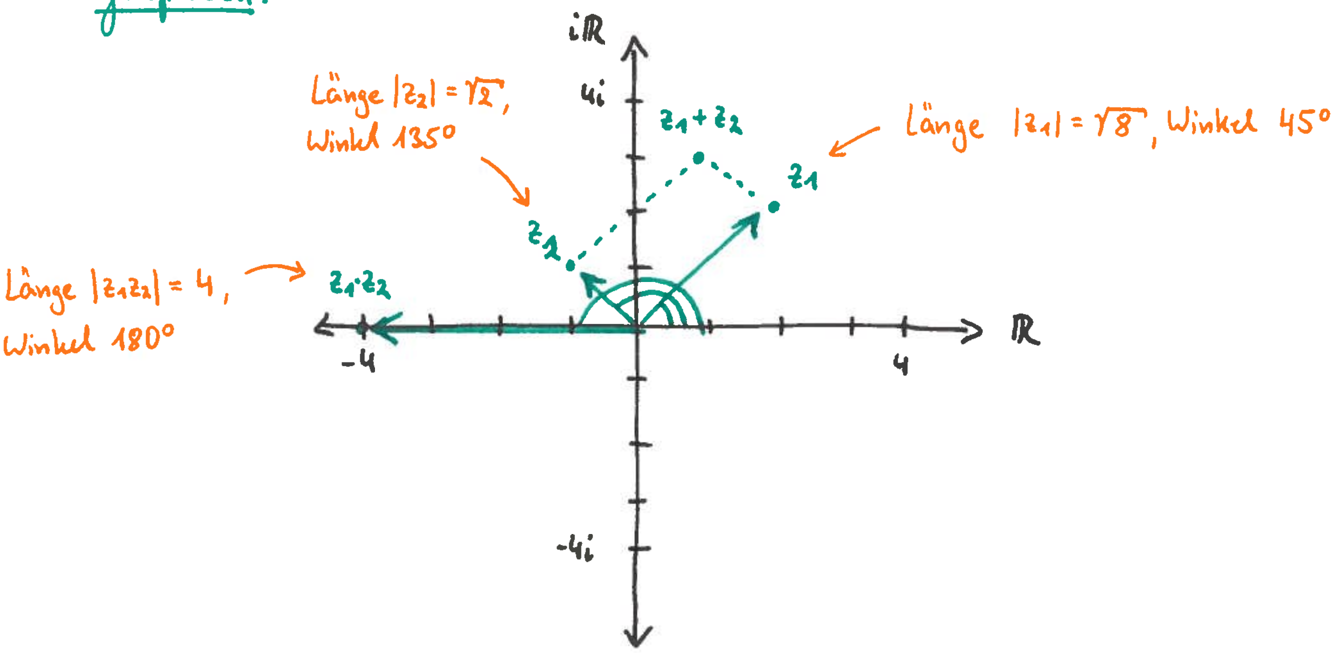
$\Leftrightarrow a = 0$ oder $a = 2$,

$a_0 = 1$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton steigend folgt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

$\boxed{\text{Bsp.}}$ $z_1 = 2+2i\ ,\ z_2 = -1+i$

- $z_1 + z_2 = (2-1) + (2+1)i = 1+3i$
- $z_1 - z_2 = (2+1) + (2-1)i = 3+i$
- $z_1 \cdot z_2 = -2 + 2i - 2i + 2i^2 = -2 + 2(-1) = -4$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)\underbrace{(-1-i)}_{\text{konjugiert-komplexe Zahl zu } z_2\text{, d.h. } \overline{z_2}}} = \dfrac{-4i}{2} = -2i$

graphisch:



Interessant:

- Länge von $z_1 \cdot z_2$ = Länge von z_1 • Länge von z_2
- Winkel von $z_1 \cdot z_2$ = Winkel von z_1 + Winkel von z_2

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

gemessen von der positiven reellen Achse aus

$\boxed{\text{D 3.2}}$

(a) $(1+4i)\cdot(2-3i) = 2-3i+8i-12i^2 = \underline{\underline{14+5i}}$

(b) $\dfrac{4}{2+i} = \dfrac{4\cdot(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{8-4i}{5} = \underline{\underline{\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}i}}$

hier verstecken sich 8 is

(c) $(1+i)^{42} = \left((1+i)^2\right)^{21} = (2i)^{21} = 2^{21}\cdot\underbrace{\underbrace{i\cdot i}_{-1}\cdot\underbrace{i\cdot i}_{-1}}_{1}\cdot\underbrace{\underbrace{i\cdot i}_{-1}\cdot\underbrace{i\cdot i}_{-1}}_{1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\underbrace{i\cdot i}_{-1}\cdot\underbrace{i\cdot i}_{-1}}_{1}\cdot i$

$= 2^{21}\left(i^4\right)^5\cdot i = 2^{21}i = \underline{\underline{2097152\,i}}$

(d) Es gilt:

- $|z| = |z-w+w| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |z-w|+|w| \iff |z-w| \geq |z|-|w|$
- $|w| = |w-z+z| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |w-z|+|z| \iff \underbrace{|w-z|}_{=|z-w|} \geq \underbrace{|w|-|z|}_{=-(|z|-|w|)}$

Daraus folgt:

$$|z-w| \geq |z|-|w| \quad \text{und} \quad |z-w| \geq -(|z|-|w|)$$

$$\iff |z-w| \geq \max\{|z|-|w|,\ -(|z|-|w|)\} = \big||z|-|w|\big|.$$

Erinnerung: $|x| = \max\{x,-x\}$

$\boxed{D3.3}$

reell od. komplex

<u>Infos</u>: • $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\iff \exists C>0 : \forall n\in\mathbb{N} : |z_n| < C$,

• Satz 3.2 : $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n+b_n i)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

$\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren,

• Satz 2.4: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

reell

(a) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n+b_n i)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente komplexe Folge.

$\overset{S.3.2}{\Longrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

$\overset{S.2.4}{\Longrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt.

$\Longrightarrow$ Es gibt Zahlen $C_1, C_2 > 0$ mit $|a_n| < C_1$ und $|b_n| < C_2$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Wähle $C>0$ mit $C = C_1+C_2$.

Sei $n\in\mathbb{N}$ beliebig.

$$\Longrightarrow |z_n| = |a_n+b_n i| \leq |a_n| + |b_n i|$$

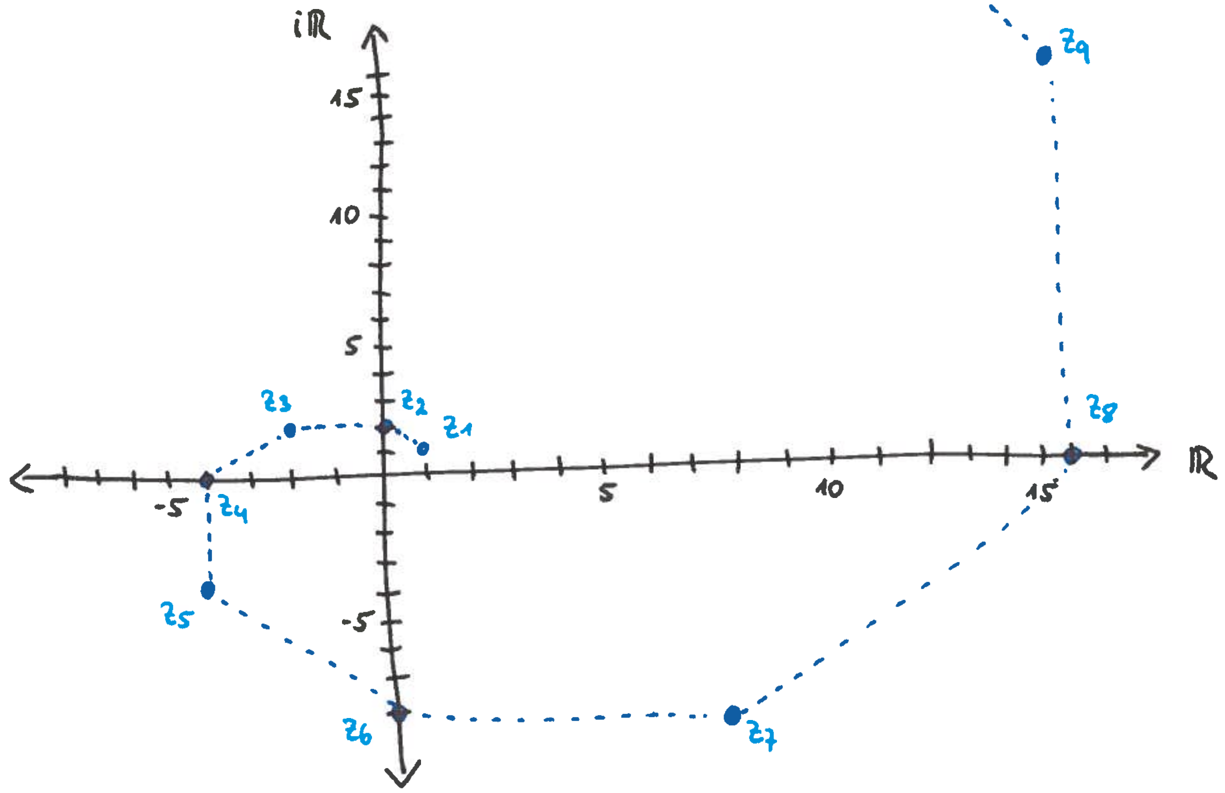
$$= |a_n| + |b_n| < C_1 + C_2 = C. \qquad \square$$

$|b_n i| = \sqrt{0^2+b_n^2} = \sqrt{b_n^2} = |b_n|$

(b) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n i)_{n\in\mathbb{N}} = \left((1+i)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	1	0	$\boxed{-2}$	-4	-4	0	8	16	16	...
b_n	1	2	$\boxed{2}$	0	-4	-8	-8	0	16	...

z.B. $(1+i)^3 = -2+2i$



Nein!

$z_{8k} = a_{8k} + b_{8k} \cdot i$

$$z_{8k} = (1+i)^{8k} = (2i)^{4k} = (-4)^{2k} = 16^k. \Rightarrow a_{8k} = 16^k,\ b_{8k} = 0$$

$(a_{8k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ist unbeschränkt.

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

S.2.4 $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

S.3.2 $\Rightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Alternative Begründung (direkt)

Es gilt $|z_n| = |(1+i)^n| \underset{|xy| = |x|\cdot|y|}{=} |1+i|^n = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $C>0$ mit $|z_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.

$\underset{\text{Aufgabe (a)}}{\Rightarrow}$ $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.