AI - TÜ 5

D5.1

(a) <u>z.z.</u>: $\forall c \in \mathbb{R}: \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} x_n = c \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(c)$

<u>Bew.</u>: $\boxed{\text{Sei } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}}$

Fall 1: $c \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow f(c) = 1$.

$\boxed{\text{Wähle } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{R} \text{ mit } x_n = c + \frac{\sqrt{2}}{n}.}$

wäre $x_n \in \mathbb{Q}$, dann wäre $\sqrt{2} = (x_n - c)n \in \mathbb{Q}$ ↯
$\Rightarrow x_n \notin \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots \notin \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (0,0,0,\ldots)$.

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = c + 0 = c}$ und $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(c)}$.

Fall 2: $c \notin \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow f(c) = 0$.

Satz 1.9 (iii)

$\boxed{\text{Wähle } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{R} \text{ mit } x_n \in \mathbb{Q} \text{ und } c < x_n < c + \frac{1}{n}.}$

Alternativ: $x_n = \frac{\lceil c 10^n \rceil}{10^n}$

$\Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (1,1,1,\ldots)$.

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = c}$ und $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(c)}$

da $\lim_{n\to\infty} c = c$
und $\lim_{n\to\infty} c + \frac{1}{n} = c + 0 = c$
(Einschließungskriterium)

(b) Z.z.: $\forall c \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in \mathbb{R} : |x-c| < \delta \wedge |f(x)-f(c)| \geq \varepsilon$

Bew.: $\boxed{\text{Sei } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}}$

Fall 1: $c \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow f(c) = 1$.

$\boxed{\text{Wähle } \varepsilon > 0 \text{ mit } \varepsilon = \tfrac{1}{2}.}$

siehe (*) auf der nächsten Seite.

$\boxed{\text{Sei } \delta > 0 \text{ beliebig.}}$

$\boxed{\text{Wähle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } c-\delta < x < c+\delta \text{ und } x \notin \mathbb{Q}.}$

$\Rightarrow \boxed{|x-c| < \delta}$ und $\boxed{|f(x)-f(c)| = |0-1| = 1 \geq \varepsilon.}$

Fall 2: $c \notin \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow f(c) = 0$.

$\boxed{\text{Wähle } \varepsilon > 0 \text{ mit } \varepsilon = \tfrac{1}{2}.}$

$\boxed{\text{Sei } \delta > 0 \text{ beliebig.}}$

Satz 1.9 (iii)

$\boxed{\text{Wähle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } c-\delta < x < c+\delta \text{ und } x \in \mathbb{Q}.}$

$\Rightarrow \boxed{|x-c| < \delta}$ und $\boxed{|f(x)-f(c)| = |1-0| = 1 \geq \varepsilon.}$

$\square$

(*) Nur für Interessierte !!

Es gibt nach Satz 1.9 (iii) Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $c - \delta < p < c$ und $c < q < c + \delta$. Wähle $x \in \mathbb{R}$ mit $x = (p-q)\sqrt{2} + q$. Dann gilt:

1) $x \notin \mathbb{Q}$.

Wäre $x \in \mathbb{Q}$, dann wäre auch

$$\sqrt{2} = \frac{x-q}{p-q} \in \mathbb{Q}. \;\lightning$$

2) $c - \delta < x < c + \delta$.

Folgt aus: $c - \delta < p < (p-q)\sqrt{2} + q < q < c + \delta$

gerne nachrechnen! ;-)

$\boxed{D5.2}$

Es gilt: $f(x) = x \iff f(x) - x = 0$. D.h. definiere $g(x) = f(x) - x$ und wende den ZWS für $y = 0$ an.

- $g(x)$ ist stetig, da $f(x)$ und x stetig sind.
- $\min\{g(0), g(1)\} \leq 0 \leq \max\{g(0), g(1)\}$, da $g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0]$ und $g(0) = f(0) - 0 \in [0, 1]$, d.h. $g(1) \leq 0 \leq g(0)$.

$\Longrightarrow$ Nach dem ZWS gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$, d.h. mit $f(x) = x$.

$\boxed{\text{D5.3}}$

(a) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Aus $$\frac{e^x}{x^m} > \frac{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}}{x^m} = \frac{x}{(m+1)!} \xrightarrow{x \to \infty} \infty$$

folgt: $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty .$$

(b) Wähle (beispielsweise!) $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ und $y_n = 2\pi n$.

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim_{n\to\infty} y_n \text{, aber}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(x_n)}_{=(1,1,1,\dots)} = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(y_n)}_{=(0,0,0,\dots)}$$