AI - TÜ 8

D8.1

„partielle Integration"

(a) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{f}{\sin(x)} \cdot \underset{g'}{\cos(x)}\, dx \overset{PI}{=} \Big[\underset{f}{\sin(x)} \cdot \underset{g}{\sin(x)}\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{f'}{\cos(x)} \cdot \underset{g}{\sin(x)}\, dx \,.$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\cos(x)\, dx = \Big[\sin(x)\cdot\sin(x)\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \,.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot\Big[\sin(x)^2\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \sin(0)^2\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \,.$$

„Substitutionsregel"

$f(g(x))$ mit $f(x) = x$
und $g(x) = \sin(x)$

SR mit:
$y = \sin(x)$,
$y' = \cos(x)$

$\sin(\frac{\pi}{2})$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot \underset{g'(x)}{\cos(x)}\, dx \overset{SR}{=} \int_0^1 y\, dy = \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \,.$$

$\sin(0)$

S.4.13

(c) Aus $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$ folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\cos(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin(2x)} = \Big[\underbrace{-\tfrac{1}{4}\cos(2x)}\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \,.$$

ist Stammfunktion von

Infos zu D8.1

- Bei (a) hätte man auch f und g' vertauschen können, d.h. $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = -\cos(x)$ statt $f(x) = g(x) = \sin(x)$ wählen. Das Ergebnis wäre dann gewesen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\Big[-\cos(x)^2\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

- Auch bei (b) hätte man f und g anders wählen können:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(x)}_{y'}\cdot\big(-\underbrace{(-\cos(x))}_{y}\big)\,dx \overset{SR}{=} \int_{-1 \leftarrow -\cos(0)}^{0 \leftarrow -\cos(\frac{\pi}{2})} -y\,dy$$

$$= \Big[-\frac{1}{2}y^2\Big]_{y=-1}^{0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

- Bei allen drei Teilaufgaben hätte man auch zuerst nur eine Stammfunktion berechnen können (Grenzen ignorieren) und dann den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b}$$

Stammfkt. von

anwenden. Die erhaltenen Stammfunktion von $\sin(x)\cos(x)$ wären gewesen: $\frac{1}{2}\sin(x)^2$ bei (a) und (b) (bzw. $-\frac{1}{2}\cos(x)^2$ mit den alternativen f und g) und $-\frac{1}{4}\cos(2x)$ bei (c).

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\boxed{D8.2}$

(a) $$\int \underset{f}{x^2} \underset{g'}{e^x}\,dx \overset{PI}{=} x^2e^x - \int \underset{f}{2x}\underset{g'}{e^x}\,dx \overset{PI}{=} x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right)$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = (x^2-2x+2)e^x.$$

(b) $$\int \ln x\,dx = \int \underset{f}{\ln(x)} \cdot \underset{g'}{1}\,dx \overset{PI}{=} \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x.$$

(c) $$\underbrace{\left(\arcsin(x^2)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}.$$

SR mit $y = \arcsin(x^2)$, $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

$$\int \frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{1}{2}y\,dy = \left[\frac{1}{4}y^2\right]_{y=\arcsin(x^2)} = \frac{1}{4}\arcsin(x^2)^2.$$

SR mit $y = \arcsin(x)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $$\int \frac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \Big[\ln|y|\Big]_{y=\arcsin(x)}$$
$$= \ln|\arcsin(x)|.$$