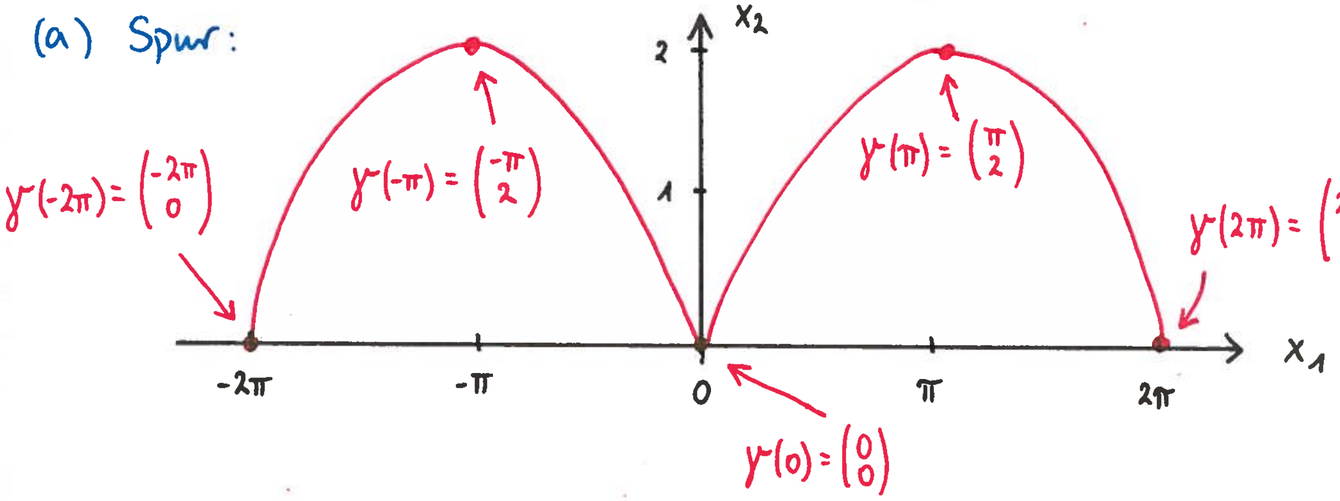
AI - TÜ 10

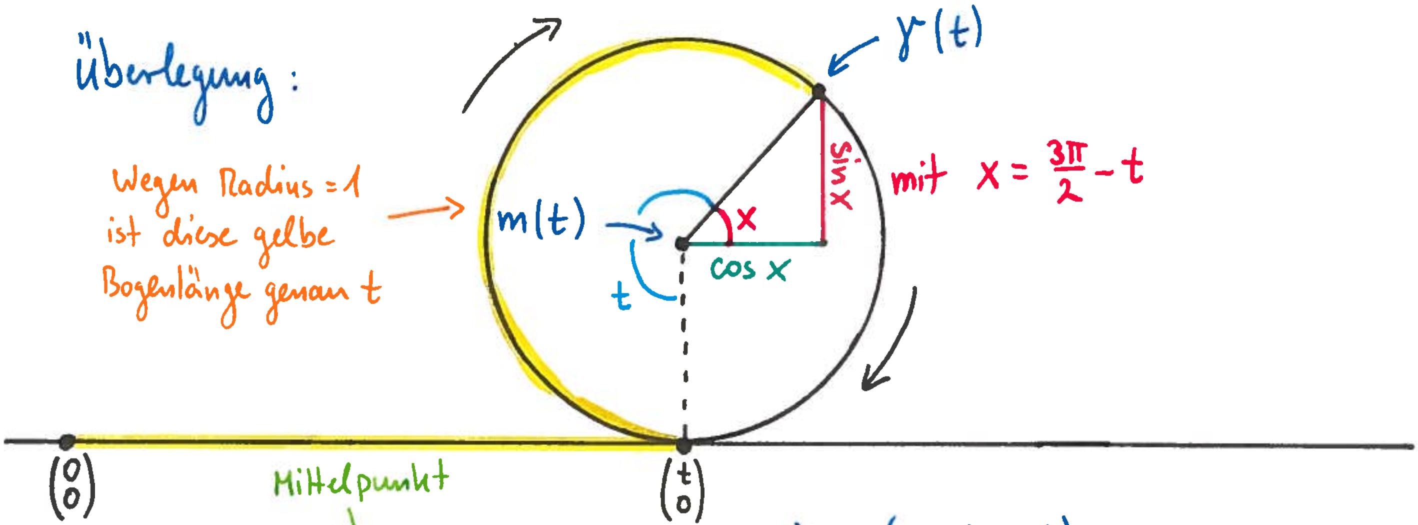
D10.1

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Spur:



Überlegung:



Mittelpunkt

$$\gamma(t) = m(t) + \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(2\pi - t) \\ \cos(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t - 2\pi) \\ \cos(t - \pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

(b) $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$$\gamma'(t) = 0 \iff 1-\cos(t) = 0 \wedge \sin(t) = 0$$

$$\iff \cos(t) = 1 \wedge \sin(t) = 0$$

$$\iff t \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \wedge t \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\iff \underline{\underline{t \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}}}$$

$\Longrightarrow$ γ ist in $\{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ singulär.

$\Longrightarrow$ γ ist nicht regulär.

(c) Mit Satz 10.4 und Satz 4.13 (i) und (ii):

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{1-2\cos(t) + (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}$$

sieht schön aus, ist aber schwer zu integrieren

$$= \sqrt{2-2\cos(t)} = \sqrt{2(1-\cos(t))}$$

$$= \sqrt{2\left(1-\left((\cos(\tfrac{t}{2}))^2 - (\sin(\tfrac{t}{2}))^2\right)\right)}$$

$(\sin(\frac{t}{2}))^2 + (\cos(\frac{t}{2}))^2$

$$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot (\sin(\tfrac{t}{2}))^2} = \underline{\underline{2\left|\sin(\tfrac{t}{2})\right|}} = \begin{cases} 2\sin(\frac{t}{2}), & \sin(\frac{t}{2}) \geq 0 \\ -2\sin(\frac{t}{2}), & \sin(\frac{t}{2}) < 0 \end{cases}$$

$$L\left(\gamma|_{[-\pi,\pi]}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

Stammfkt. von $2|\sin(\frac{t}{2})|$ nicht schön

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2\left|\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right| dt$$

wesentlich einfacher!

$$= \int_{-\pi}^{0} -2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right) dt + \int_{0}^{\pi} 2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right) dt$$

$$= \left[4\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_{t=-\pi}^{0} + \left[-4\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_{t=0}^{\pi}$$

$$= 4\cos(0) - 4\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \left(-4\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) + 4\cos(0)$$

$$= 4 - 0 + 0 + 4$$

$$= \underline{\underline{8}} \, .$$

(d) Mit Satz 10.8 (ii) gilt für alle $t \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}}_{\text{Definitionsbereich von } \kappa(t)}$:

$$\kappa(t) = \frac{(1-\cos(t))\cos(t) - \sin(t)^2}{\sqrt{((1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2)^3}} \leftarrow (\|\gamma'(t)\|_2)^3$$

$$= \frac{\cos(t) - (\cos(t)^2 + \sin(t)^2)}{(2(1-\cos(t)))^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\cos(t) - 1}{(2(1-\cos(t)))^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-(1-\cos(t))}{\sqrt{8}\cdot(1-\cos(t))^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{1-\cos(t)}} .$$

$\kappa(t)$ ist in der Nähe der singulären Punkte $\underbrace{\text{maximal}}_{\text{betragsmäßig}}$.

$\boxed{\text{D10.2}}$

In dieser Aufgabe sehen die Gammas alle so komisch aus, weil sie davor ks waren. In der ersten Version des Blattes hieß die Kurve $k_n(t)$ statt $\gamma_n(t)$.

(a) $$L(\gamma_0) = 1 \quad , \quad L(\gamma_{n+1}) = L(\gamma_n) + \frac{1}{3} L(\gamma_n) = \frac{4}{3} L(\gamma_n)$$

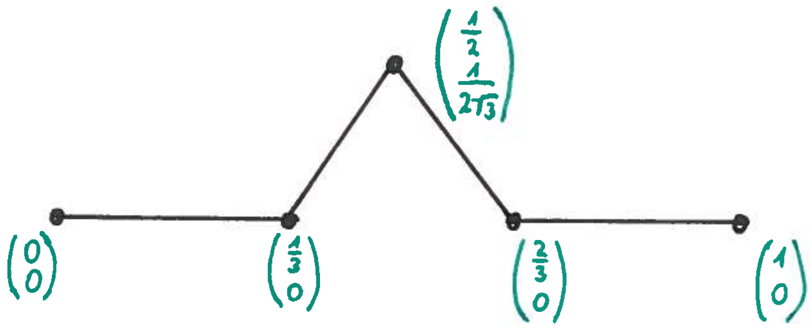
$$\Longrightarrow \underline{\underline{L(\gamma_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n}} \; .$$

(b) Tipp: $\gamma(t) = \frac{b-t}{b-a} v + \frac{t-a}{b-a} w \; , \; t \in [a,b]$ beschreibt die Verbindungsstrecke zwischen v und w $(v, w \in \mathbb{R}^n)$.

γ_0:

$$\gamma_0(t) = \frac{1-t}{1-0}\binom{0}{0} + \frac{t-0}{1-0}\binom{1}{0} = \binom{t}{0} \quad , \quad t \in [0,1] \; .$$

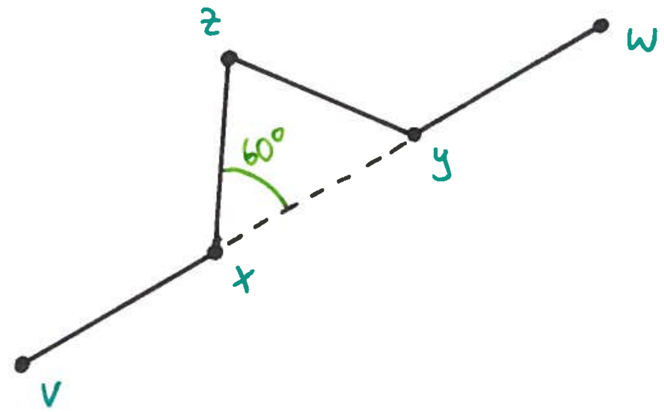
γ_1:



$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{4}-t}{\frac{1}{4}-0}\binom{0}{0} + \frac{t-0}{\frac{1}{4}-0}\binom{\frac{1}{3}}{0} = \binom{\frac{4}{3}t}{0} \quad , & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\binom{\frac{1}{3}}{0} + \frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + \frac{1}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad , & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{\frac{3}{4}-t}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\binom{\frac{2}{3}}{0} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad , & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \frac{1-t}{1-\frac{3}{4}}\binom{\frac{2}{3}}{0} + \frac{t-\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\binom{1}{0} = \binom{\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}}{0} \quad , & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \; . \end{cases}$$

Nur für Interessierte!

Allgemein:



Aus

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \vdots \\ \frac{b-t}{b-a} v + \frac{t-a}{b-a} w, & t \in [a,b] \\ \vdots \end{cases}$$

wird

$$\gamma_{n+1}(t) = \begin{cases} \vdots \\ \frac{c-t}{c-a} v + \frac{t-a}{c-a} x, & t \in [a,c] \\ \frac{d-t}{d-c} x + \frac{t-c}{d-c} z, & t \in [c,d] \\ \frac{e-t}{e-d} z + \frac{t-d}{e-d} y, & t \in [d,e] \\ \frac{b-t}{b-e} y + \frac{t-e}{b-e} w, & t \in [e,b] \\ \vdots \end{cases}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} c &= a + \tfrac{1}{4}(b-a) = \tfrac{3}{4}a + \tfrac{1}{4}b, \\ d &= a + \tfrac{1}{2}(b-a) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b, \\ e &= a + \tfrac{3}{4}(b-a) = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{3}{4}b \end{aligned}\right\}$$

Nur für Interessierte!

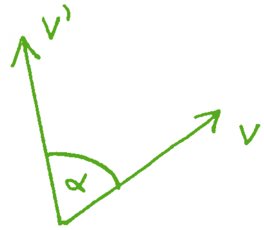
und

$$x = v + \tfrac{1}{3}(w-v) = \tfrac{2}{3}v + \tfrac{1}{3}w,$$

$$y = v + \tfrac{2}{3}(w-v) = \tfrac{1}{3}v + \tfrac{2}{3}w,$$

$$z = x + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) \\ \sin(60°) & \cos(60°) \end{pmatrix}}\cdot (y-x) = x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}(y-x).$$

Die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dreht einen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn!)



$$v' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} v$$

(c) Die Kurve γ_∞ mit $\gamma_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$ für alle $t \in [0,1]$ hätte Länge

$$\lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

d.h. sie wäre nicht $\underbrace{\text{rektifizierbar}}$.

$\Longleftrightarrow$ hat endliche Länge.