AI - TÜ 9

D9.1

(a) xe^{-x^2} ist auf $[0,\infty)$ stetig, d.h. $\int_0^b xe^{-x^2}dx$ existiert für alle $b\in[0,\infty)$.

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx \overset{NR}{=} \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1-\underbrace{\lim_{b\to\infty}e^{-b^2}}_{=0}\Big) = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow \int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ existiert!

Nebenrechnung

NR:

$$\int_0^b xe^{-x^2}dx = \int_0^{-b^2}\cancel{x}e^y\frac{dy}{-2\cancel{x}} = \int_0^{-b^2}-\frac{1}{2}e^y\,dy = \left[-\frac{1}{2}e^y\right]_0^{-b^2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-b^2}\right).$$

(b) <u>Erinnerung aus TÜ 7:</u> $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$.

$\ln(x)$ ist auf $(0,1]$ stetig, d.h. $\int_a^1 \ln(x)\,dx$ existiert für alle $a \in (0,1]$.

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\downarrow 0} \int_a^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\downarrow 0} \Big[x\ln(x) - x\Big]_{x=a}^1$$

$$= \lim_{a\downarrow 0} -1 - (a\ln(a) - a) = -1 + \left(\lim_{a\downarrow 0} -a\ln(a)\right) + 0 \overset{NR}{=} -1.$$

$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x)\,dx$ existiert!

<u>NR</u>: $$\lim_{a\downarrow 0} -a\ln(a) = \lim_{a\downarrow 0} \frac{\overbrace{-\ln(a)}^{\to\infty}}{\underbrace{\frac{1}{a}}_{\to\infty}} = \lim_{a\downarrow 0} \frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a\downarrow 0} a = 0.$$

Satz von l'Hospital, da $\lim_{a\downarrow 0} \frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}}$ existiert.

(c) Wegen $\frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}} \geq \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|$ für alle $x \in [2,\infty)$ und

$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_{x=2}^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{b} - 2\sqrt{2} = \infty$$

$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ existiert also nicht!

existiert $\int_2^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}\,dx$ nach Satz 9.2 nicht.

Erinnerung: $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (Def. 4.12)

$\boxed{\text{D9.2}}$

Was ist das $\overbrace{\text{Taylor-Polynom}}^{T_n f(x;0)}$ einer Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots \ ?$$

Nach Satz 6.10 gilt:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots \quad \rightsquigarrow f'(0) = c_1$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \dots \quad \rightsquigarrow f''(0) = 2c_2$$

$$f'''(x) = 6c_3 + 24 c_4 x + \dots \quad \rightsquigarrow f'''(0) = 6c_3$$

$$f''''(x) = 24 c_4 + \dots \quad \rightsquigarrow f''''(0) = 24 c_4$$

$$\vdots$$

Allgemein:

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot c_n .$$

Daraus folgt:

$$T_n f(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k! \cdot c_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k .$$

D.h.:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \implies T_n f(x;0) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k .}$$

gerne aufschreiben ;-)

(a) $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \underbrace{\mathcal{O}(x^7)}$

„etwas der Form $c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + \ldots$"

$$\Rightarrow T_6 f(x;0) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

(b) $\sin(x^2) = x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \mathcal{O}(x^{10})$

$$\Rightarrow T_6 f(x;0) = x^2 - \frac{1}{6}x^6.$$

(c) $\sin(x^2+2x) = x^2+2x - \frac{1}{3!}(x^2+2x)^3 + \frac{1}{5!}(x^2+2x)^5 + \mathcal{O}(x^7)$

$$= 2x + x^2 + \left(-\frac{1}{3!}\cdot 8\right)x^3 + \left(-\frac{1}{3!}\cdot 3\cdot 4\right)x^4$$

$$+ \left(-\frac{1}{3!}\cdot 3\cdot 2 + \frac{1}{5!}\cdot 2^5\right)x^5 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\cdot 5\cdot 2^4\right)x^6 + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\Rightarrow T_6 f(x;0) = 2x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 - \frac{11}{15}x^5 + \frac{1}{2}x^6.$$

(d) $\sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right)^3$

$$+ \frac{1}{5!}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}(x^7)\right)^5 -$$

$$= x + \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!}\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{3!}\right) + \frac{1}{5!}\right)x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

$$\Rightarrow T_6 f(x;0) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5.$$

Erinnerung: $T_n f(x;c)$ ist eine Approximation von $f(x)$ um $x = c$.

$\boxed{D9.3}$ Infos:

- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ (aus Satz 9.5)
- Für $x \to 0$ gilt:
  $\sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k = \mathcal{O}(x^n)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2\arctan(x)}{x(1-\cos(4x))}$$

„etwas der Form $c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + \dots$"

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \mathcal{O}(x^5) - 2\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)}{x\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!}(4x)^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{8x^3 + \mathcal{O}(x^5)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x^2)}{8 + \mathcal{O}(x^2)}$$

$$= -\frac{1}{12}.$$