AI - TÜ7

D7.1

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

$$\overset{\text{l'H}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} = 0.$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \overset{e^x \text{ stetig}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} \overset{(a)}{=} e^0 = 1.$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+\arctan(x)))'}{x'} \overset{\text{KR}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{1} = 1.$$

$$\overset{\text{l'H}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} (1+\arctan(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\arctan(x))}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(1+\arctan(x))}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}} = e^1 = e.$$

(d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)-x}{\sin(x)+x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\sin(x)-x)'}{(\sin(x)+x)'} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}}.$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, d.h. diese zwei Gleichungen sind falsch!

Zweiter Versuch (nach ewigem Rumgefummel):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)-x}{\sin(x)+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{\frac{\sin(x)}{x} + 1} = -1$$

Für $x>0$ gilt: $\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$

(e) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x)-x)'}{(\sin(x)+x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1} = \frac{0}{2} = 0 .$$

$$\overset{l'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin(x)-x}^{\to 0}}{\underbrace{\sin(x)+x}_{\to 0}} = 0 .$$

$\boxed{D7.2}$

Annahmen:

- $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall,
- $f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, d.h. f diff'bar mit f' stetig,
- f' beschränkt, d.h. $\exists C > 0 : \forall x \in I : |f'(x)| \leq C$.

zu zeigen:

f Lipschitz-stetig, d.h. $\exists L \in \mathbb{R} : \forall x,y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|$.

Beweis:

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit f' beschränkt.

$\Longrightarrow$ Es gibt ein $C > 0$ mit $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in I$.

$\boxed{\text{Wähle } L = C.}$

$\boxed{\text{Seien } x,y \in I \text{ beliebig.}}$

Fall 1: $x = y$.

$$\boxed{\Longrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \leq L \cdot 0 = L \cdot |x-y|.}$$

Fall 2: $x < y$.

$\overset{\text{S.7.5}}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein $\xi \in (x,y)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

$$\Longrightarrow L = C \geq |f'(\xi)| = \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

Fall 3: $x > y$.

$\overset{\text{S.7.5}}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein $\xi \in (y,x)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

$$\Longrightarrow L = C \geq |f'(\xi)| = \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|.}$$ $\square$

Infos: • $T_n f(x;c) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}\cdot(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}\cdot(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n$.

• $T_n f(x;c)$ ist eine Approximation von f um den Punkt c.

$\boxed{\text{D7.3}}$

(a) $f'(x) = (2^x)' = (e^{x\ln 2})' \overset{KR}{=} \underbrace{e^{x\ln 2}}_{2^x} \cdot \underbrace{(x\ln 2)'}_{\ln 2} = (\ln 2)\cdot 2^x$.

$f''(x) = \left((\ln 2)2^x\right)' \overset{FR}{=} (\ln 2)\cdot(2^x)' = (\ln 2)^2\cdot 2^x$.

$\Rightarrow f'(0) = \ln 2$, $f''(0) = (\ln 2)^2$.

Mit Def. 7.9:

$$T_2 f(x;0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k$$

$$= \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$0! := 1$

$$= 1 + (\ln 2)x + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 x^2.$$

(b) Vermutung: $f^{(n)}(x) = (\ln 2)^n \cdot 2^x$.

Beweis: IA: $f^{(0)}(x) = f(x) = 2^x = (\ln 2)^0 2^x$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $\overbrace{f^{(n)}(x) = (\ln 2)^n \cdot 2^x}^{IV}$.

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{IV}{=} \left((\ln 2)^n \cdot 2^x\right)'$

$\overset{FR}{=} (\ln 2)^n \cdot (2^x)' = (\ln 2)^n \cdot (\ln 2)\cdot 2^x$

$= (\ln 2)^{n+1}\cdot 2^x$. $\square$

$$\Rightarrow \quad T_\infty f(x;0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k \cdot 2^0}{k!} \cdot (x-0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} .$$

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} \underset{\text{Def. 4.10}}{=} e^{x \ln 2} = 2^x .$$