AI - TÜ 6

$\boxed{D6.1}$

<u>Tipp</u>: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gilt:

$$a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{b \ln a}.$$

(a) $$(xe^x)' = \overset{1}{x'}e^x + x\overset{e^x}{(e^x)'} = \underline{\underline{e^x + xe^x}}$$

(b) $$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\overset{1}{x'}\ln x - x\overset{\frac{1}{x}}{(\ln x)'}}{(\ln x)^2} = \underline{\underline{\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}}}$$

KR mit $f(x) = e^x$, $g(x) = r \ln x$

(c) $$(x^r)' = \left(e^{r \ln x}\right)' = \underbrace{e^{r \ln x}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{r \cdot \frac{1}{x}}_{g'(x)} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{r \cdot x^{r-1}}}$$

(d) $$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' \overset{KR}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \overset{PR}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(x' \ln x + x(\ln x)'\right)$$

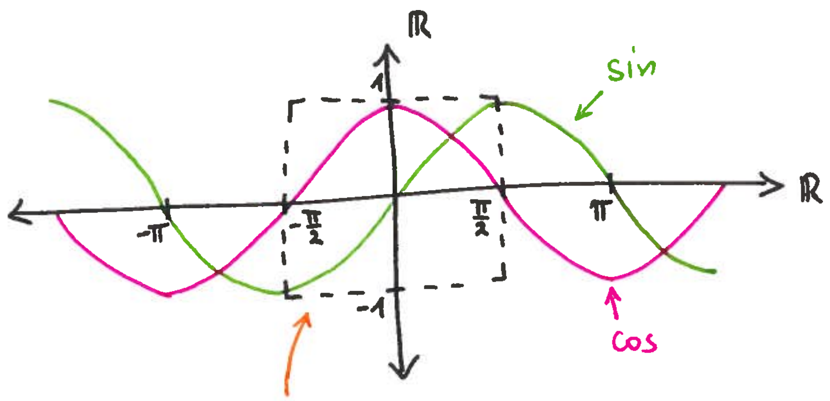
$$= \underline{\underline{x^x \cdot (\ln x + 1)}}$$

(e) $$\left(\ln(\ln(\ln(x)))\right)' \overset{KR}{=} \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \left(\ln(\ln(x))\right)'$$

$$\overset{KR}{=} \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot (\ln(x))'$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}}}$$

$\boxed{\text{D6.2}}$



In diesem Bereich ist sin bijektiv (= injektiv und surjektiv) und besitzt deshalb eine Umkehrfunktion

$$\arcsin: [-1,1] \longrightarrow \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

mit $\sin^{-1} = \arcsin$.

(a) Für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt: $\sin'(x) = \cos(x) > 0$.

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \sin: \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \text{ ist streng monoton wachsend.}$$

$$\overset{\text{S.6.6}}{\Longleftrightarrow} \quad \sin: \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \text{ ist injektiv.} \quad \square$$

Zu (*): Bei der Aussage (ii) von Satz 6.6 sollte x ein <u>innerer Punkt</u> von I sein. D.h. egal, ob I die Form $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ oder (a,b) hat, sollte bei (ii) „$x \in (a,b)$" statt „$x \in I$" stehen. Siehe beispielsweise Satz 7.8 im Skript von 2012.

Da $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ stetig, gilt nach dem ZWS:

$$\forall y \in [\underset{\min\{\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})\}}{-1}, \underset{\max\{\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})\}}{1}] : \exists x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] : \sin(x) = y$$

$$\Longrightarrow \quad \sin: \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \text{ surjektiv und somit bijektiv.} \quad \square$$

(b) Satz 6.7 liefert für $f(x) = \sin(x)$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ und $f'(x) = \cos(x)$:

$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$ $\qquad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ $\qquad f(f^{-1}(x)) = x$

$$\arcsin'(x) = \underbrace{\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}}_{\text{würde als Endergebnis reichen!}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

D6.3

(a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' \overset{PR}{=} 2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2\left(\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)'$$

$$\overset{KR}{=} 2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underline{\underline{2x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)}}$$

$x \neq 0$, da $x-0$ im Nenner steht. $\Longrightarrow f(x) = x^2\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$.
Allgemein gilt bei $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ immer $x \neq c$.

(b) Z.Z: $$\underset{f'(0)}{\overset{\shortparallel}{}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \overset{!}{=} 0,$$

d.h.: $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

da $-1 \leq \sin(\ldots) \leq 1$ $\Longrightarrow$

$$-x_n = x_n\cdot(-1) \leq x_n \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x_n}\right) \leq x_n \quad \text{falls } x_n > 0,$$

$$x_n \leq x_n\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x_n}\right) \leq x_n\cdot(-1) = -x_n \quad \text{falls } x_n < 0.$$

$$\Longrightarrow \underbrace{-|x_n|}_{\to 0} \leq x_n\cdot\sin\left(\tfrac{1}{x_n}\right) \leq \underbrace{|x_n|}_{\to 0}.$$

$$\overset{\text{Einschl.-krit.}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x_n}\right) = 0. \quad \square$$

(c) <u>z.z.</u>: $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) \neq \overset{f'(0)}{0}$.

<u>Beweis</u>: Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} 2x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}$$

$$= -1$$

$$\neq 0. \qquad \square$$