AI - TÜ 14

D14.1

Lineares Differentialgleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}}_{y'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}}_{y(t)}$$

Erinnerungen:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis $\Longleftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem.
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig

  $\Longleftrightarrow \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} : \left(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0 \right).$
- v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ $\Longleftrightarrow$ $Av = \lambda v$.

(a) Warum Lösung?

Sei $y(t) = e^{\lambda_j t} \cdot v_j$ (d.h. $y'(t) = \lambda_j e^{\lambda_j t} \cdot v_j$) für ein $j \in [n]$.

$$\implies Ay(t) = Ae^{\lambda_j t} \cdot v_j = e^{\lambda_j t} A v_j \underset{\substack{\uparrow \\ v_j \text{ EV von } A \text{ zum EW } \lambda_j}}{=} e^{\lambda_j t} \lambda v_j = y'(t). \qquad \square$$

Warum unabhängig?

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + \dots + a_n e^{\lambda_n t} \cdot v_n = 0$.

$\Longrightarrow a_1 e^{\lambda_1 t} = \dots = a_n e^{\lambda_n t} = 0$. (da $v_1, \dots, v_n$ unabh.)

$\Longrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$. (da $e^x > 0$) $\square$

(b)

1. $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) - (-2)\cdot 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$.

$\Longrightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

2. Aus $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

folgt besitzen die Lösungen $v_{11} = 1$, $v_{12} = 2$ und $v_{21} = 2$, $v_{22} = 1$.

$\Longrightarrow$ Mögliche Eigenvektoren sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \\ 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{D14.2}}$

Nichtlineares Differentialgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} (a-by(t))\cdot x(t) \\ -(c-dx(t))\cdot y(t) \end{pmatrix}}^{f(t,x(t),y(t))} \quad \text{mit} \quad \underbrace{x(0)=x_0 \text{ und } y(0)=y_0,}_{\text{Anfangswertproblem, da Anfangsbedingungen gegeben!}}$$

wobei $a,b,c,d,x_0,y_0 > 0$ Konstanten sind.

(a) $(a-by)x$ und $-(c-dx)y$ sind stetig differenzierbar, also ist es auch f.

$\Longrightarrow$ Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist das obige AWP eindeutig lösbar.

Vorlesung 13c, Folie 1

(b) z.z.: $F(x(t)) + G(y(t))$ konstant (d.h. Ableitung gleich Null!)

$$\Big(F(x(t)) + G(y(t))\Big)' = \Big(F(x(t))\Big)' + \Big(G(y(t))\Big)'$$

$$\overset{KR}{=} F'(x(t))\cdot x'(t) + G'(y(t))\cdot y'(t)$$

$$= \frac{c-dx(t)}{\cancel{x(t)}}\cdot (a-by(t))\cancel{x(t)} + \frac{a-by(t)}{\cancel{y(t)}}\cdot(-(c-dx))\cancel{y(t)}$$

$$= \underline{\underline{0}}.$$

[Rest der Aufgabe: ]