AI - TÜ 1

Info: ~~Auf Folien 7-9~~ Im AI Trainer findet ihr eine Zusammenfassung von Def. 1.4, Satz 1.5 und Satz 1.8. Auf die Idee kam ich leider erst nach der Übung.

$\boxed{\text{D 1.1}}$

Vermutung: $\sup X = 1$, $\inf X = \frac{1}{2}$, $\max X$ existiert nicht, $\min X = \frac{1}{2}$

Beweise:

- 1 ist o.S. von X.

  Sei $x \in X$ beliebig.

  $\Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

  $\Rightarrow 1 \geq x \iff 1 \geq \frac{n}{n+1} \iff \underbrace{n+1 \geq n}_{\text{wahr!}}$. $\square$

- kein $y<1$ ist o.S. von X.

  Sei $y<1$ beliebig.

  $\Rightarrow y < \frac{n}{n+1} \iff yn+y<n \iff y<(1-y)n \overset{y<1}{\iff} \frac{y}{1-y} < n$.

  Wähle $x := \frac{n}{n+1}$ für $n = \left\lceil \frac{y}{1-y} \right\rceil + 1$.

  $\Rightarrow y < x$ $\square$

Daraus folgt: $\sup X = 1$.

- wegen $\underbrace{1 \notin X}$ existiert $\max X$ nicht.

  $\frac{n}{n+1} = 1 \iff n = n+1$ ↯

• $\frac{1}{2}$ ist u.S. von X.

Sei $x \in X$ beliebig.

$\Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}n \Leftrightarrow \underbrace{1 \leq n}_{\text{wahr!}}$ $\square$

• wegen $\underbrace{\frac{1}{2} \in X}_{\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\ \checkmark}$ folgt $\min X = \frac{1}{2}$.

• Wegen $\min X = \frac{1}{2}$ folgt $\inf X = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{D1.2}}$ z.z.: $\boxed{\sup(\lambda X) = \lambda \sup X}$

$\lambda X = \{x \mid x = \lambda x' \text{ für ein } x' \in X\} = \{\lambda x' \mid x' \in X\}$

Aus Satz 1.5 folgt:

(1) $\forall x \in X: s \geq x \quad \wedge \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X : s - \varepsilon < x \leq s \quad \Rightarrow \quad \sup X = s$

(2) $\forall x \in X: s \geq x \quad \wedge \quad \sup X = s \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in X: s - \varepsilon < x \leq s$

(s. auch Folie 7 im AI Trainer).

Ersetzt man X durch λX und s durch $\lambda \sup X$ in (1) und s durch $\sup X$ in (2) – es gilt $\sup X \in \mathbb{R}$, da X beschränkt –, so erhält man:

(3) $\forall x \in \lambda X : \lambda \sup X \geq x \quad \wedge \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in \lambda X : \lambda \sup X - \varepsilon < x \leq \lambda \sup X \Rightarrow \sup(\lambda X) = \lambda \sup X$

(4) $\underbrace{\forall x \in X : \sup X \geq x}_{\text{ist wahr}} \quad \wedge \quad \underbrace{\sup X = \sup X}_{\text{ist wahr}} \Rightarrow \underbrace{\forall \varepsilon' > 0 : \exists x' \in X : \sup X - \varepsilon < x' \leq \sup X}_{\text{muss wahr sein!}}$

(Bei (4) habe ich ε' und x' benutzt, weil sie nicht notwendigerweise dieselben Variablen ε und x aus (3) sind.)

Um $\sup(\lambda X) = \lambda \sup X$ zu zeigen, zeigen wir beide Bedingungen von (3) und benutzen dabei die Folgerung von (4).

<u>Beweise</u> :

- $\forall x \in \lambda X : \lambda \sup X \geq x$.

  Sei $x \in \lambda X$ beliebig.

  $\Rightarrow$ $x = \lambda x'$ für ein $x' \in X$.

  $\Rightarrow$ $x = \lambda x' \leq \lambda \sup X$, da $x' \leq \sup X$.

  $\Rightarrow$ $x \leq \lambda \sup X$. $\square$

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in \lambda X : \lambda \sup X - \varepsilon < x \leq \lambda \sup X$

  Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

  $\Rightarrow$ Für $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{\lambda}$ gilt auch $\varepsilon' > 0$.

  $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ Es gibt ein $x' \in X$ mit $\sup X - \varepsilon' < x' \leq \sup X$.

  $\Rightarrow$ $\lambda \sup X - \lambda\varepsilon' < \lambda x' \leq \lambda \sup X$, da $\lambda > 0$.

  Wähle also $x := \lambda x'$.

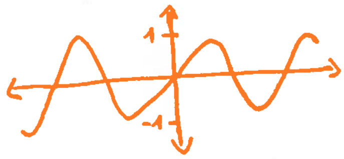
  $\Rightarrow$ $\lambda \sup X - \varepsilon < x \leq \lambda \sup X$. $\square$

Daraus folgt mit (3): $\sup(\lambda X) = \lambda \cdot \sup X$.

$\boxed{D1.3}$ Siehe Notation für Intervalle auf Seite 4 im Kurzskript.

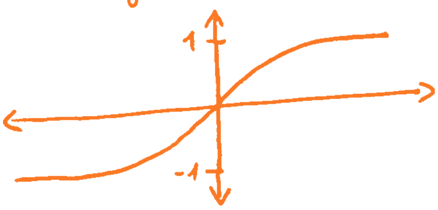
(a) $[3,5]$, $\{1\}$, $\{\Phi, e, \pi\}$, $\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$

„goldener Schnitt"

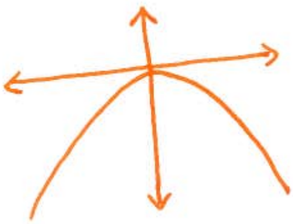


(b) $(3,5)$, $\{\tanh x \mid x \in \mathbb{R}\}$

„Tangens hyperbolicus"



(c) $(-\infty,5]$, $(3,5]$, $\{-x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$



(d) $(3,\infty)$, $[3,\infty)$, $\{e^x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\{\frac{1}{x} \mid x > 0\}$