AI - TÜ 11

$\boxed{\text{D 11.1}}$

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2$$

Partielle Ableitungen ← $\partial_i f$ = f nach x_i abgeleitet, $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j f$, usw.

„del"

- $\partial_1 f(x_1,x_2) = 4x_1 + 3x_2$,
- $\partial_2 f(x_1,x_2) = 3x_1 + 1$,

} erster Ordnung

- $\partial_{11} f(x_1,x_2) = 4$,
- $\partial_{12} f(x_1,x_2) \overset{\text{S.11.5}}{=} \partial_{21} f(x_1,x_2) = 3$,
- $\partial_{22} f(x_1,x_2) = 0$.

} zweiter Ordnung

Gradient ← Satz 11.4 (i)

- $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1+3x_2 \\ 3x_1+1 \end{pmatrix}$.

Hesse-Matrix ← Def. 11.5

- $\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. ← Wegen Satz 11.5 immer symmetrisch!

Richtungsableitung ← Satz 11.4 (i)

- $\partial_v f(x_1,x_2) = \underbrace{\left\langle \nabla f(x_1,x_2), \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{Skalarprodukt}} = x_1 + 3x_2 - 1$.

Skalarprodukt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

$\boxed{\text{D11.2}}$ ← siehe Sätze 11.6 und 11.7 und den AI Trainer

(a) Es gilt:

$\partial_x f(x,y)$ $\qquad$ $\partial_x\partial_x f(x,y)$ $\qquad$ $\partial_x\partial_y f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-3y \\ 3y^2-3x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

$\partial_y f(x,y)$ $\qquad$ $\partial_y\partial_x f(x,y)$ $\qquad$ $\partial_y\partial_y f(x,y)$

$$\begin{aligned}
\binom{x}{y} \text{ kritisch} \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla f(x,y) = 0 \leftarrow \text{Nullvektor } \binom{0}{0} \\
& \qquad \text{Zahl Null} \\
&\Leftrightarrow \quad 3x^2-3y = 0 \;\wedge\; 3y^2-3x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = y \;\wedge\; y^2 = x \\
&\Leftrightarrow \quad (x=0 \;\wedge\; y=0) \vee (x=1 \;\wedge\; y=1).
\end{aligned}$$

Mit

$$\nabla^2 f(0,0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \quad \text{und} \quad \nabla^2 f(1,1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

folgt

$$\chi_A(\lambda) = (0-\lambda)^2 - (-3)^2 = \lambda^2 + 9$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$ sind Eigenwerte von A.

$\Longrightarrow$ A indefinit.

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ Sattelpunkt.

siehe AI Trainer

und

$$\chi_B(\lambda) = (6-\lambda)^2 - (-3)^2 = \lambda^2 - 12\lambda + 27$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 9$ sind Eigenwerte von B.

$\Longrightarrow$ B positiv definit.

$\Longrightarrow$ $(1,1)$ $\underbrace{\text{isoliertes}}_{=\text{striktes}}$ lokales Minimum.

(b) Es gilt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

Wegen $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $(0,0)$ ein kritischer Punkt.

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ und ist also weder positiv noch negativ definit, aber auch nicht indefinit.

Es gilt aber $f(0,0) = 0$ und $f(x,0) = x^3 \begin{cases} <0 & \text{falls } x<0 \\ >0 & \text{falls } x>0 \end{cases}.$

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ ist kein lokales Extremum, bzw. $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt (s. Satz 11.7 (v)).

$\boxed{\text{D11.3}}$ ← siehe Def./Satz 11.8 und Satz 11.9

(a) Es gilt

$$DF(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$DG(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ \cos(y_1+y_2) & \cos(y_1+y_2) \end{pmatrix}.$$

Mit $F(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$ folgt:

Matrixmultiplikation

$$D(G\circ F)(x_1,x_2,x_3) = DG(x_1+x_2,\, x_2+x_3)\cdot DF(x_1,x_2,x_3)$$

$$= \begin{pmatrix} x_2+x_3 & x_1+x_2 \\ \cos(x_1+2x_2+x_3) & \cos(x_1+2x_2+x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2+x_3 & x_1+2x_2+x_3 & x_1+x_2 \\ \cos(x_1+2x_2+x_3) & 2\cos(x_1+2x_2+x_3) & \cos(x_1+2x_2+x_3) \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$D(G\circ F)(x_1,x_2,x_3)$$

$$= DG(F(x_1,x_2,x_3))$$

$$= DG(x_1+x_2\,,\,x_2+x_3)$$

$$= D\begin{pmatrix} x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3 \\ \sin(x_1+2x_2+x_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2+x_3 & x_1+2x_2+x_3 & x_1+x_2 \\ \cos(x_1+2x_2+x_3) & 2\cos(x_1+2x_2+x_3) & \cos(x_1+2x_2+x_3) \end{pmatrix}.$$