AI - TÜ 12

$\boxed{\text{D12.1}}$

① $$\int_0^2 \int_{-x}^{x} xy^2 \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\tfrac{1}{3} x y^3 \right]_{y=-x}^{x} dx = \int_0^2 \tfrac{2}{3} x^4 \, dx$$

$$= \left[\tfrac{2}{15} x^5 \right]_{x=0}^{2} = \underline{\underline{\tfrac{64}{15}}} .$$

$|y|^2 = y^2$

② $$\int_{-2}^{2} \int_{|y|}^{2} xy^2 \, dx \, dy = \int_{-2}^{2} \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=|y|}^{2} dy = \int_{-2}^{2} 2y^2 - \tfrac{1}{2} |y|^2 y^2 \, dy$$

$$= \int_{-2}^{2} 2y^2 - \tfrac{1}{2} y^4 \, dy = \left[\tfrac{2}{3} y^3 - \tfrac{1}{10} y^5 \right]_{y=-2}^{2} = \underline{\underline{\tfrac{64}{15}}} .$$ juhu!

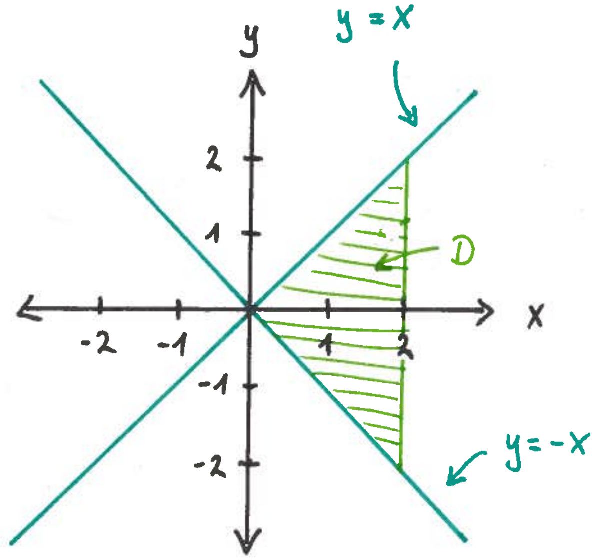
In beiden Fällen wurde über dieselbe Menge D mit

D wie Dreieck

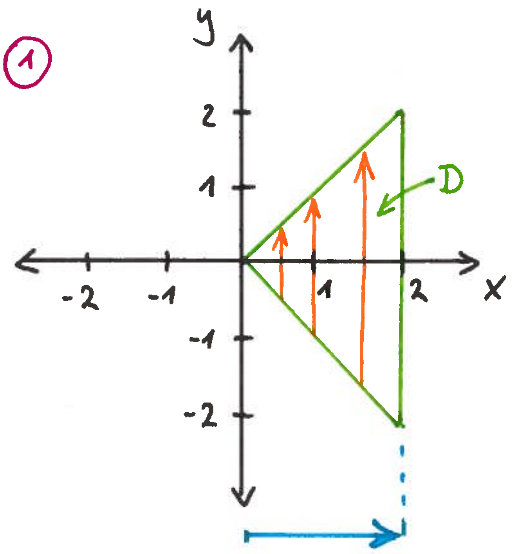
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{0 \leq x \leq 2, \; -x \leq y \leq x}_{\Leftrightarrow \; -2 \leq y \leq 2, \; |y| \leq x \leq 2} \}$$

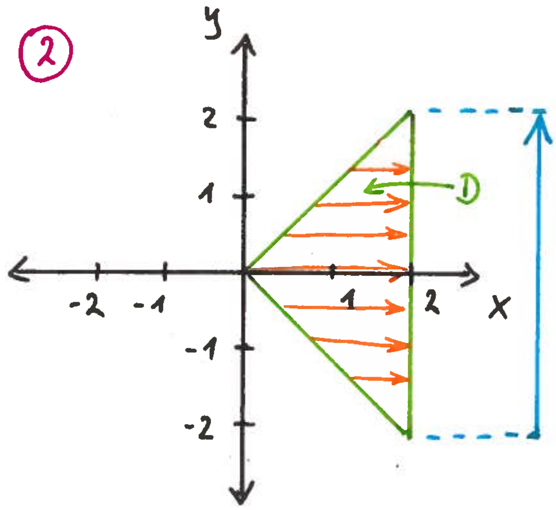
integriert.

Graphisch:



Integrationsrichtungen:





hellblau: äußeres Integral, orange: inneres Integral

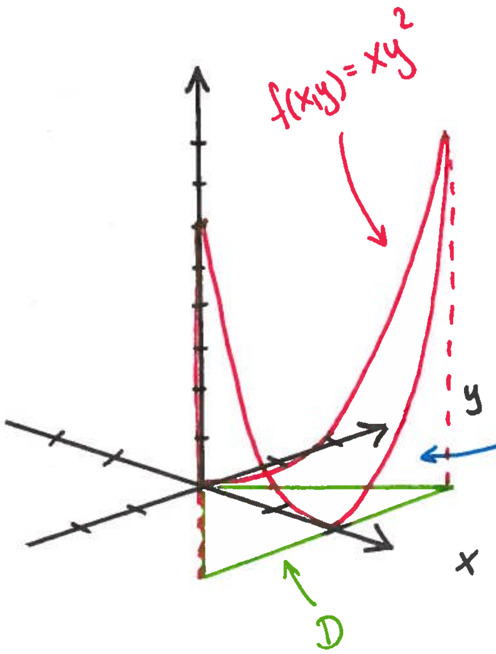
Die Rechnungen 1 und 2 sind zwei Ansätze, um das Integral

$$\iint_D xy^2 \, d(x,y)$$

„schlichtes Gebiet" oder „Normalbereich"

zu bestimmen.

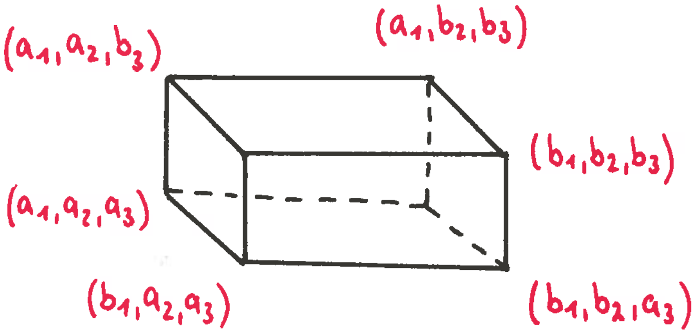
Insgesamt sieht das so aus:



Volumen ist $\frac{64}{15}$.

$\boxed{D 12.2}$

Die Menge, über die integriert werden soll, ist diesmal ein Quader:



$$\iiint_Q f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \overset{\text{S.v. Fubini}}{=} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot g_3(z)\, dx\, dy\, dz$$

Q wie Quader

$$= \int_{a_3}^{b_3} g_3(z) \cdot \int_{a_2}^{b_2} g_2(y) \cdot \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} g_1(x)\, dx}_{\text{ist eine Zahl}}\, dy\, dz$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} g_1(x)\, dx \right) \cdot \int_{a_3}^{b_3} g_3(z) \cdot \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} g_2(y)\, dy}_{\text{ist eine Zahl}}\, dz$$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} g_1(x)\, dx \right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} g_2(y)\, dy \right) \cdot \left(\int_{a_3}^{b_3} g_3(z)\, dz \right).$$

Im Allgemein gilt zwar

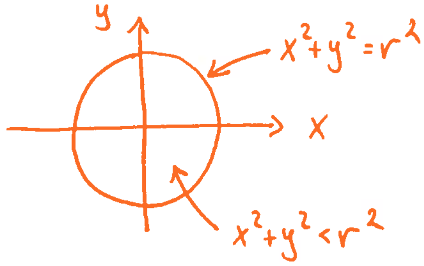
$f(x) \neq f(y)$,

aber

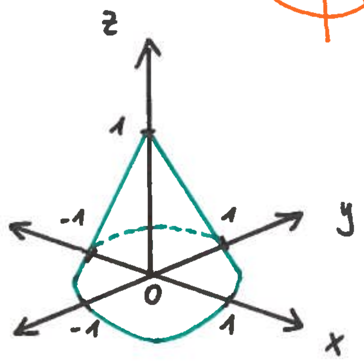
$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy$

$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} g_1(x)\, dx \right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} g_2(x)\, dx \right) \cdot \left(\int_{a_3}^{b_3} g_3(x)\, dx \right).$$

$\boxed{\text{D12.3}}$ Info: $x^2+y^2 \leq r^2$ beschreibt einen Kreis mit Radius r.



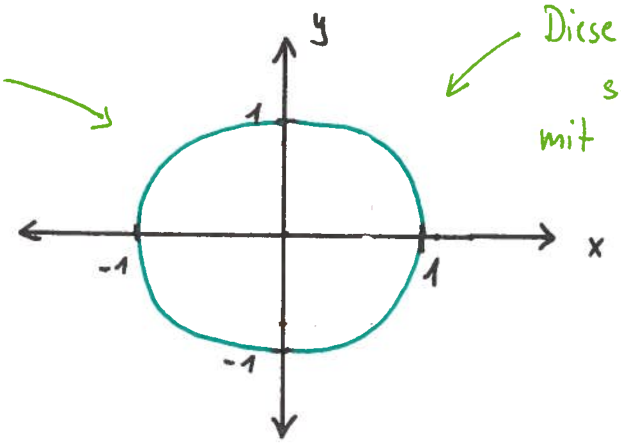
(a) Graphisch:



Bei $z=0$ ist K ein Kreis mit Radius 1. Bei $z=1$ hat er Radius 0 (Spitze des Kegels). Zwischen $z=0$ und $z=1$ nimmt der Radius $r=1-z$ linear ab.

(b) Graphisch (von oben gesehen):

Der Kegel hat die Form $f(x,y)=z$ mit $x^2+y^2=(1-z)^2$, d.h. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.



Diese Wassermelone stellt einen Kreis mit $x^2+y^2=1$ dar, also die Basis des Kegels.

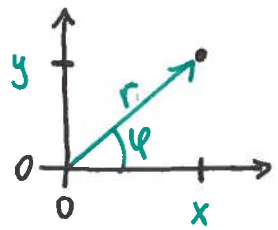
$$\iint\limits_{\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}}} 1-\sqrt{x^2+y^2}\; d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1-\sqrt{x^2+y^2}\; dy\,dx = (\dots)$$

$\iff y^2 = 1-x^2$

$\iff |y| = \sqrt{1-x^2}$

$\iff -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

(c) <u>Rezept</u>: 1) „dy dx" oder „dx dy" durch „$\cdot r \, d\varphi \, dr$" oder „$\cdot r \, dr \, d\varphi$" ersetzen.



2) Grenzen von φ und r graphisch überlegen.

3) Beim Integranden x durch $r \cdot \cos\varphi$ und y durch $r \cdot \sin\varphi$ ersetzen

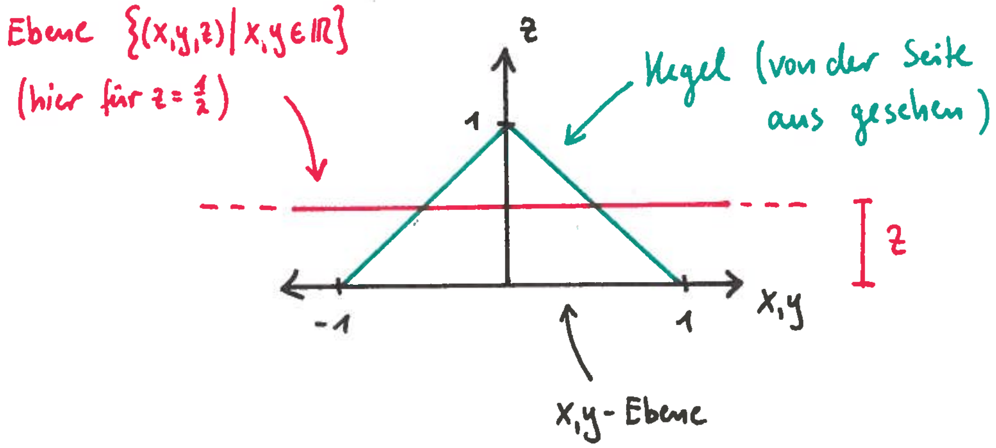
$$(\ldots) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - \sqrt{(r \cdot \cos\varphi)^2 + (r \cdot \sin\varphi)^2}\right) \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - \sqrt{r^2 \cdot \underbrace{\left((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right)}_{=1}}\right) \cdot r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r - r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \left[(r - r^2)\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^1 2\pi (r - r^2) \, dr = \left[\pi r^2 - \frac{2}{3}\pi r^3\right]_{r=0}^{1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi}}.$$

(d)



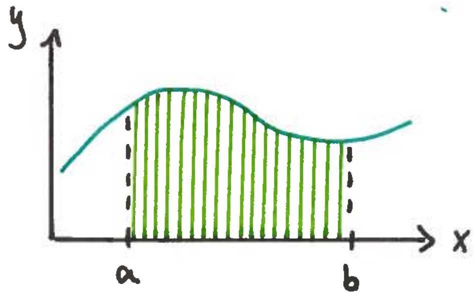
F(z) ist die Fläche eines Kreises mit Radius $1-z$

$$\Rightarrow \quad F(z) = \pi \cdot (1-z)^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{vol}(K) = \int_0^1 F(z)\, dz = \int_0^1 \pi (1-z)^2 dz = \pi \cdot \int_0^1 1 - 2z + z^2 \, dz$$

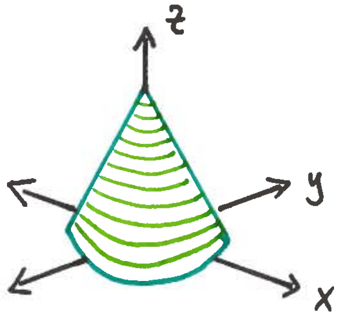
$$= \pi \cdot \left[z - z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi}} \, .$$

Analog zu



„Fläche = Summe aller Streifen"

gilt:



„Volumen = Summe aller Flächen".